SADƏ ÇOXMƏRHƏLƏLİ PROSESLƏRİN MODELLƏŞDİRİLMƏSİ

T.M. Hacıyev, R.Y. Hüseynova, R.M. Bağıyeva
Azərbaycan Dövlət Aqrar Universiteti

Açar sözlər: *dinamik proqramlaşdırma, resurs, optimallıq prinsipi, optimal strategiya, funksional tənliklər, maksimum qiymət*

Gündəlik həyatda nəzəri və əməli fəaliyyətdə həmişə müəyyən qərarlar qəbul edilir ki, bu qərarın qəbul edilməsi isə mövcud konkret şəraitdən asılı olur. Müəyyən bir qərarın birdən-birə deyil, tədricən, ayrı-ayrı mərhələlərdə qəbul edilməsi məqsədə uyğun olur. Buna uyğun olaraq, öyrənilən müxtəlif prosesləri birmərhələli və çoxmərhələli proseslərə ayırmaq olar.

Hər hansı prosesdə yalnız bir dəfə qərar qəbul edilərsə, belə proses birmərhələli proses adlanır. Əgər proses zamanı bir neçə dəfə qərar qəbul edilirsə, belə prosesə çoxmərhələli proses deyilir. Dinamik proqramlaşdırma çoxmərhələli prosesdir. Bu mərhələlərin hər birində ayrıca qərar qəbul edilir, lakin hər bir mərhələdə qəbul edilən qərar yalnız həmin mərhələyə nəzərən yox, bütün prosesə nəzərən müəyyən mənada optimal olmalıdır. "Optimallıq prinsipi" dinamik proqramlaşdırmanın əsas prinsipidir və dinamik proqramlaşdırma üsullarının köməyilə həll edilən bütün məsələlər həmin prinsipə əsaslanır.

Dinamik proqramlaşdırmanın əsasını təşkil edən "optimallıq prinsipi" belə ifadə edilir: "Optimal strategiya elə bir xassəyə malikdir ki, başlanğıc vəziyyət və ilk qərarlar necə olursa-olsun, sonralar qəbul edilən bütün qərarlar ilk qərardan yaranmış vəziyyətə nisbətən optimal strategiya təşkil etməlidir".

Dinamik proqramlaşdırma məsələlərinin həllində optimallıq prinsipindən istifadə edilməsi ayrı-ayrı mərhələlərdə qəbul edilən qərarların təkcə həmin mərhələyə nəzərən yox, bütün prosesə nəzərən optimal olmasını təmin edir.

Ardıcıl olaraq qərarlar qəbul edilən çoxmərhələli proseslərdə öyrənilən hər hansı sistemin vəziyyəti bir mərhələdən o biri mərhələyə keçdikcə dəyişir. Bu dəyişiklik funksional tənliklər sistemi vasitəsilə ifadə edilir. Çoxmərhələli proseslər üçün xarakterik olan funksional tənlik aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$f_N(x) = \max_{0 < Y_N < X}\left[g_N(y_N) + f_{N-1}(x - y_N)\right] \qquad (1)$$

$f_N(x)$ simvolu öyrənilən prosesdə qarşıya qoyulan məqsədi ifadə edir (məsələn, keyfiyyət göstəricisi, gəlir və s.) N prosesdə mərhələlərin sayını göstərir. X -sistemin başlanğıc mərhələdəki vəziyyətidir. Başqa sözlə, $f_N(x)$ ilk x vəziyyətindən başlayaraq, prosesin getdiyi N mərhələ nəticəsindən, optimal strategiyaya əməl etməklə alınan maksimum qiymətdir (gəlir, keyfiyyət və s.). (1)-in sağ tərəfindəki ifadənin maksimum qiyməti y_N dəyişəninə görə axtarılır. Yəni, 0 ilə x arasında y_N dəyişəni üçün elə qiymət tapılmalıdır ki, (1)-də sağ tərəf (orta mötərizə) maksimum qiymət alsın. Tutaq ki, y_N dəyişəninin həmin qiyməti y_N^* -dir. Bu mərhələdə qəbul edilən qərar y_N^* kəmiyyətinin seçilməsi deməkdir [1].

$g_N(y_N)$ kəmiyyəti N -ci mərhələdə y_N -in sıfırla x arasında optimal qaydada seçilməsi nəticəsində əldə edilən gəliri ifadə edir. y_N^* qiyməti seçildikdən sonra, qalan $(N-1)$ sayda mərhələlər sistemin $(x - y_N^*)$ vəziyyətindən başlanacaq. Onda $f_{N-1}(x - y_N^*)$ funksiyası, $(x - y_N^*)$ vəziyyətindən başlanan və yerdə qalmış $(N-1)$ mərhələ yerinə yetirildikdən sonra əldə edilən gəliri ifadə edəcək. Deməli, $f_{N-1}(x - y_N^*)$ üçün aşağıdakı ifadəni yazmaq olar:

$$f_{N-1}(x - y_N^*) = \max_{0 \le y_{N-1} \le x - y_N^*}\left[g_{N-1}(y_{N-1}) + f_{N-2}(x - y_N^* - y_{N-1})\right] \qquad (2)$$

(2) tənliyindən göründüyü kimi, y_{N-1} kəmiyyəti, ancaq sıfır ilə $(x - y_N^*)$ arasında dəyişə bilər, çünki N -ci mərhələdə qəbul edilən qərara (seçilən y_N^* -a) əsasən x kəmiyyəti $(x - y_N^*)$ -a qədər azalmışdır. (2) tənliyindən y_{N-1} kəmiyyəti üçün optimal y_{N-1}^* qiyməti seçilir. Eyni müşahidələrlə $f_{N-2}(x - y_N^* - y_{N-1})$ funksiyası üçün də analoji tənlik çıxarmaq olar. Beləliklə, (1) tənliyi prosesin baş verdiyi N -ci və $(N-1)$-ci mərhələlər arasında olan əlaqəni ifadə edir. Funksional tənliyi həll etməklə əldə ediləcək gəlirin miqdarını və $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_N^*$ sistemi ilə ifadə edilən optimal strategiyanı müəyyən etmək olar. (1) şəklində funksional tənliyə gətirilən məsələlər çoxdur. Bu tənliyin sağ tərəfindəki orta mötərizə içərisində olan birinci toplanan

funksiyanın N-ci mərhələdəki qiymətini, ikinci toplanan isə qalan bütün $(N-1)$ mərhələdəki qiymətini ifadə edir.

Ona görə də N mərhələli prosesə ikimərhələli proses kimi baxmaq olar. Bunlardan biri cari mərhələ, ikincisi isə qalan bütün mərhələlərdir. Dinamik proqramlaşdırmanın bir çox məsələlərini də funksional tənlikləri əks istiqamətdə hərəkət etməklə, yəni prosesin sonundan başlanğıcına doğru həll edirlər. Ona görə çox zaman prosesin mərhələlərini də əks istiqamətdə nömrələyirlər. Məsələn, $(N-1)$ qiyməti sonuncu mərhələni göstərir, yəni prosesin qurtarmasına bir mərhələ qalmışdır. N isə başlanğıc mərhələni ifadə edir, yəni prosesin qurtarmasına N mərhələ qalmışdır. (1) tənliyinin köməyilə $f_N(x)$ funksiyasını tapmaq üçün əvvəlcə $f_1(x)$ funksiyasını təyin edirlər. Sonra məlum $f_1(x)$ funksiyasına görə (1)–dən $f_2(x)$ funksiyasını tapırlar. $f_2(x)$ funksiyasından istifadə edərək $f_3(x)$ funksiyası və s. təyin edilir [2].

Funksional tənliklərin optimallıq prinsipinin və ümumiyyətlə, dinamik proqramlaşdırma üsullarının mahiyyətini aşağıdakı iki konkret məsələ ilə izah edək:

1. Tutaq ki, yükgötürmə qabiliyyəti V olan hər hansı təyyarənin (gəminin, qatarın və s.) N müxtəlif tipli əşya ilə yüklənməsi tələb edilir. Əşyaların çəkisi və qiyməti müxtəlifdir, həm də onlar məlum əşyalardan hesab edilir. Belə bir məsələ qoyulur ki, təyyarəyə hansı əşyalardan və neçə ədəd yükləməli ki, alınan yükün dəyəri maksimum miqdarda olsun.

Bu məsələni riyazi şəkildə ifadə etmək üçün aşağıdakı işarələri qəbul edək:

p_i-i tipli bir ədəd əşyanın çəkisi;

c_i - i tipli bir ədəd əşyanın dəyəri;

x_i - təyyarəyə yüklənən i tipli bir ədəd əşyaların sayıdır.

Aydındır ki, təyyarəyə yüklənən bütün əşyaların ümumi çəkisi onun yükgötürmə qabiliyyətindən, yəni V-dən artıq ola bilməz və əşyalar bölünməzdir. Onda təyyarənin maksimum dəyərli yüklə yüklənməsi məsələsi aşağıdakı riyazi məsələyə gətirilir:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i x_i \le V \tag{3}$$

$$x_i = 0, 1, 2, \dots \tag{4}$$

şərtləri daxilində $f = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ (5)

funksiyasının maksimum qiymətini tapmalı.

Bu məsələ, əgər (4) şərtləri (yəni x_i kəmiyyətlərinin yalnız tam qiymətlər almaq şərti) olmasaydı, adi xətti proqramlaşdırma məsələsi olardı. (4) şərtləri ilə birlikdə isə bu məsələ tam ədədli proqramlaşdırma məsələsidir.

Tutaq ki, əvvəlcə təyyarə yalnız 1 nömrəli (yəni birinci tip) əşyalarla yüklənir. Bu halda yükün maksimum dəyərini $f_1(V)$ ilə işarə edək. Onda (3)-(4)-(5) məsələsi aşağıdakı şəkil alır:

1. $p_1 x_1 \le V$

2. $x_1 = 0, 1, 2, \dots$

Şərtləri ödənməlidir. $c_1 x_1$ üçün isə maksimum qiymət alınmalıdır, yəni $f_1(V) = \max[c_1 x_1]$ $x_1 \le \frac{V}{p_1}$ olduğundan və yükün dəyərinin maksimum qiymət alması üçün x_1-i mümkün qədər böyük götürmək lazım olduğundan, aydındır ki, $x_1 = \left[\frac{V}{p_1}\right]$ olap, yəni x_1-i $\frac{V}{p}$ nisbətinin tam hissəsinə bərabər götürmək lazımdır, onda $f_1(V) = \left[\frac{V}{p_1}\right] \cdot c_1$ olar.

Beləliklə, əgər təyyarənin bütün yükgötürmə qabiliyyəti yalnız birinci növ əşyalara sərf edilərsə, yükün maksimum dəyərinin nəyə bərabər olduğu aydındır.

İndi təyyarəni birinci və ikinci növ əşyalarla yükləyək. Bu halda yükün maksimum dəyərini $f_2(V)$ ilə işarə edək. Əgər ikinci növ əşyalardan cəmi x_2 ədəd götürülərsə, onda təyyarə birinci növ əşyalardan çəki etibarı ilə $(V - p_2 x_2)$–dən artıq götürə bilməz, çünki $p_1 x_1 - p_2 x_2 \le V$ şərti ödənməlidir. Yuxarıda deyilənlərə əsasən yüklənən birinci növ əşyaların maksimum dəyəri $f_1(V-p_2x_2)$-yə bərabər olacaq. Bütün yüklənən ikinci növ əşyaların dəyəri isə c_2x_2 –yə bərabər olar. Onda ümumi yükün dəyəri $c_2x_2+f_1(V-p_2x_2)$ kəmiyyətinə bərabər olmalıdır. x_2 dəyişəni elə təyin olunmalıdır ki, $c_2x_2+f_1(V-c_2x_2)$cəmi maksimum qiymət alsın. x_2sıfırla $\left[\frac{V}{p_2}\right]$ arasında dəyişir. Onda ümumi yükün dəyərinin maksimum qiymət alması üçün x_2 dəyişəni aşağıdakı düsturdan təyin edilməlidir:

$$f_2(V)=\max_{0\le x_2\le\left[\frac{V}{p_2}\right]}\left[c_2x_2+f_1(V-p_2x_2)\right]$$

Mühakiməni eyni qayda ilə davam etdirməklə yüklənən əşyaların növlərinin sayını hər dəfə bir vahid artırmaqla, N addımdan sonra belə bir münasibət alınır:

$$f_N(V)=\max_{0\le x_N\le\left[\frac{V}{p_N}\right]}\left[c_Nx_N+f_{N-1}(V-p_Nx_N)\right]$$

Burada, c_Nx_N–N növ əşyaların dəyərini, $f_{N-1}(V-p_Nx_N)$ qalan növ əşyalardan ibarət yükün maksimum dəyərini $f_N(V)$isə ümumi yükün maksimum dəyərini ifadə edir.

Alınmış bu rekurent münasibətlərdən bütün $f_1(V)$, $f_2(V)$, ... , $f_N(V)$funksiyaları asanlıqla təyin edilir. Dinamik proqramlaşdırmada xarakterik və çoxqiymətli belə bir xüsusiyyət vardır ki, müəyyən bir məsələni həll etmək üçün əvvəlcə, o məsələni genişləndirmək, yəni ona oxşar bir neçə məsələni həll etmək əlverişli olur. Başqa sözlə, məsələnin genişləndirilməsi onun həllini asanlaşdırır. Məsələn, təyyarənin yüklənməsi məsələsini təkcə V qədər yükgötürmə qabiliyyəti üçün yox, 0-dan V-yə qədər bütün yükgötürmə qabiliyyətləri üçün həll etmək faydalı olur.

İkinci məsələ olaraq, məhdud resursların bölünməsi məsələsini nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, x miqdarda müəyyən bir resurs vardır (məsələn, işçi qüvvəsi, maşınlar, pul, torpaq və s.). Bu resursu N müxtəlif üsulla sərf etmək mümkündür. Məsələn, yuxarıda baxdığımız məsələdə resurs rolunu yükgötürmə qabiliyyəti görürdü, ondan müxtəlif üsullarla istifadə edilməsi isə təyyarənin müxtəlif tipli əşyalarla yüklənməsindən ibarət idi.

i nömrəli üsulla sərf edilən vəsaitin miqdarını x_i, bu üsulla əldə edilən gəliri isə φ_1x_1 ilə işarə edək. Bütün üsullarla əldə edilən gəlirin eyni vahidlərlə ölçüldüyü fərz edilir. Onda vəsaitin bölünməsi məsələsi riyazi şəkildə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$\sum_{i=1}^{N}x_i=x,$ şərtləri daxilində $\sum_{i=1}^{N}\varphi_ix_i$ funksiyasının maksimum qiymətini tapmalı, yəni hər üsulla

$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,N}$

resursun hansı hissəsini sərf etməli ki, bütün üsullarla əldə edilən ümumi gəlir maksimum miqdarda olsun.

Aydındır ki, maksimum gəlir ancaq resursun miqdarından (yəni x -dən) asılı olacaq. Onda olar.

$$f_N(x)=\max_{(x_i)}\left[\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(x_i)\right] \qquad (6)$$

Belə ki, $\sum_{i=1}^{N}x_i=x,\quad x_i\ge 0,\ i=\overline{1.N}$ (7)

Deməli, burada $f_N(x)$ x-qədər vəsaitin N müxtəlif üsulla istifadə edilməsi nəticəsində əldə edilən maksimum gəliri ifadə edir.

Yuxarıdakı misalda olduğu kimi, burada da əvvəlcə bütün vəsaitin ancaq birinci üsulla, sonra ikinci üsulla və s. sərf edildiyini fərz etsək, bir-biri ilə bağlı olan rekurent münasibətlər ala bilərik. Doğurdan da bütün x vəsaiti yalnız birinci üsulda sərf edilərsə, onda (6), (7) şərtlərinə əsasən $f_1(x)=\max[\varphi_1(x_1)]=\varphi_1(x)$ olar. Vəsait iki üsulla sərf edilərsə, həm də ikinci üsulla vəsaitin x_2-yə bərabər hissəsi sərf edilərsə, onda $f_2(x)=\max\limits_{0\le x_2\le x}[\varphi_2(x_2)+f_1(x-x_2)]$ olar. Eyni qayda ilə $f_k(x)$ və $f_{k-1}(x)$ funksiyaları üçün onları əlaqələndirən aşağıdakı rekurent münasibət alınacaqdır.

$$f_k(x)=\max_{0\le x_k\le x}[\varphi_k(x_k)+f_{k-1}(x-x_k)]\quad k=2,3,...,N \qquad (8)$$

Doğurdan da k nömrəli üsulla bütün vəsaitin x_k-ya bərabər hissəsi sərf edilərsə, əldə edilən gəlir $\varphi_k(x_k)$-ya bərabər olur. Onda qalan bütün $(k-1)$ sayda üsul üçün cəmi $(x-x_k)$ qədər vəsait qalcaq. Bu qədər vəsaitdən əldə edilən maksimum gəlir isə $f_{k-1}(x-x_k)$ –ya bərabər olacaq. Beləliklə, k nömrəli və bütün $(k-1)$ sayda üsullarla X vəsaiti sərf edilərkən əldə edilən ümumi gəlir $f_k(x)$-ə bərabər olmalıdır [3].

Həm birinci, həm də ikinci məsələdə çıxarılan rekurent münasibətlər optimallıq prinsipinə əsaslanmaqla əldə edilir. (8) münasibəti N dəyişənli funksiyanın maksimum qiymətinin axtarılması kimi çətin və uzun hesablamalar tələb edən bir məsələnin, N sayda bir dəyişənli funksiyanın maksimum qiymətinin axtarılması ilə əvəz edilməsinə imkan verir. Belə rekurent münasibətlərin köməyilə başqa üsullarla həll edilə bilməyən məsələləri də həll etmək mümkündür.

ƏDƏBİYYAT

1. Лежнёв А. В. Динамическое программирование в экономических задачах, Учебное пособие, 2015
2. Свиридов А.Т. Задачи динамического программирования. Учебное пособие. – Калининград: КГТУ, 2006.
3. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Динамическое программирование, М.: Вильямс, 2005.

Modeling of simple multilayer processes

T.M. Hajıyev, R.Y. Huseynova, R.M. Bağıyeva
Azerbaijan State Agrarian University

SUMMARY

Key words: *dynamic programming, resource, optimum principle, optimal strategy, functional equations, maximum price*

In order to solve a particular issue in dynamic programming, it is evident that it is advantageous to expand that issue, to solve a number of similar issues, which facilitates its solution. A mathematical model was drawn up for the solution of the first issue under consideration and a useful solution was shown.

In the second issue, the question of division of limited resources was considered, the mathematical model of the issue was established and its stages of its solution were explained.

Thus, it was noted that recourse relations in both issues were derived based on the optimum principles. It is noted in the article that it is possible to solve the issues which can't be solved by means of recurrent relations in other ways.

Моделирование простых многослойных процессов

Т.М. Гаджиев, Р.Ю. Гусейнова, Р.М. Багиева
Азербайджанский государственный аграрный университет

РЕЗЮМЕ

Ключевые слова: *динамическое программирование, ресурсы, принцип оптимальности, оптимальная стратегия, функциональные уравнения, максимальная оценка*

Чтобы решить конкретную задачу в динамическом программировании, вначале расширить задачу, т.е. было показано решение ряда подобных задач, что упрощает его решение. Для решения рассматриваемого первого вопроса была разработана математическая модель и было показано полезное решение проблемы.

Во второй задаче был рассмотрен вопрос о распределении ограниченных ресурсов, была создана математическая модель и объяснены ее этапы.

Таким образом, было отмечено, что повторяющиеся отношения в обоих случаях были получены основываясь на принцип оптимизма.