УДК 519.21

РОБАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ РИСКОВ

Член-корреспондент НАНА А.Б.Садыгов, Р.М.Зейналов

Исследованы проблемы построения робастных решений в условиях риска и неопределенности. Рассмотрены две модели распределения средств, для минимизации потенциальных рисков. Проблемы поиска их робастных решений сведены к соответствующим задачам линейного программирования.

Ключевые слова: *робастные решения, потенциально опасные объекты, линейное программирование, условия неопределенности, мера риска*

Введение

Как известно, ключевым вопросом в теории и практике принятия решений остается неполнота или неопределенность информации, на основе которой принимаются те или иные решения.

К неполноте, как правило, относят отсутствие, недостаток или неточность информации об изучаемых процессах, их характеристиках и параметрах. Более сложным понятием представляется неопределенность, связанная с неопределенным поведением или случайной реализацией в будущем некоторых характеристик и параметров изучаемых процессов. Решения, касающиеся будущего, практически всегда несут в себе неопределенность. Поэтому лица, принимающие решения (ЛПР) обязательно должны это учитывать.

Рассмотрим в качестве примера ипотечное кредитование, проблемы которого во многих странах послужили спусковым механизмом для развития финансового кризиса. Банк, выдающий кредиты под залог покупаемой недвижимости, должен учитывать будущие цены на недвижимость. В случае, когда они растут быстрее стоимости кредита, проблем нет. Изъятие заложенного имущества в случае задолженности с последующей его продажей позволяет банку вернуть свои деньги. Подобные кредиты можно выдавать любому, что и происходило на практике. Иной выглядит ситуация при падении цен. В случае задолженности банку, кроме заложенной недвижимости, необходимо вернуть еще разницу стоимостей кредита и изъятой недвижимости, что возможно при наличии: 1) адекватного начального взноса; 2) дополнительных активов, или имущества у должника. В случае ненадежных заемщиков у банка сразу возникают проблемы возврата кредитов, которые так кумулятивно реализовались на практике.

Этот простой пример характеризует важную методологическую проблему: как учесть будущую неопределенность (изучаемых процессов и их параметров) при принятии решений? Ипотечные учреждения под влиянием длинной предыстории роста цен на недвижимость в погоне за прибылью, часто, просто не учитывают возможность обратного процесса.

До настоящего времени единая теория принятия решений в условиях риска и неопределенности не предложена. Известны разные подходы для принятия подобных решений. Это, в первую очередь, классическая теория ожидаемой полезности [1, 2], парадоксы которой [3, 4] стимулировали многочисленные попытки ее модификации [5, 6, 7]. Среди них отметим также подходы, связанные с использованием обобщений понятий классической теории вероятности, например, в теории Демстера-Шейфера [8, 9] и ей подобных [10].

Не углубляясь в детали данной проблематики, остановимся на одном из плодотворных подходов для принятия решений в условиях неопределенности. Речь идет о понятии робастного решения.

Робастные решения и меры риска. Смысл робастного решения заключается в том, что не стоит искать оптимальные решения для каждого из возможных сценариев развития будущих событий, важно найти решение, которое является хорошим по сравнению с альтернативами в широком диапазоне вероятных будущих сценариев. Этот подход стимулировал развитие соответствующей математической теории [9, 10, 11].

Заметим, что такое понятие крайне полезно и в разнообразных оптимизационных постановках. Например, какой смысл в поиске точных оптимальных решений, возникающих на практике возмущения, флуктуации или отказы могут сделать бессмысленными? Подход состоит в том, чтобы не тестировать ранее найденные оптимальные решения на устойчивость (робастность) для отбора пригодных, а искать эффективные среди устойчивых (робастных) решений. Для этого, естественно, необходима некоторая мера, описывающая свойство робастности решений при возможных возмущениях, на всем множестве вероятных сценариев.

В случае, когда решения принимаются в условиях риска и неопределенности, в этом качестве вполне адекватно может выступать мера риска. Так, в портфельной теории привлекательной выглядит когерентная мера риска (КМР) [3], в частности полиэдральная когерентная мера риска (ПКМР) [3]. Хорошие свойства последней позволяют сводить задачи оптимизации портфеля к проблемам линейного программирования (ЛП) [1]. По сути, оптимальный портфель выбирается по соотношению доходность–мера риска, где мера риска количественно оценивает риск (в виде потенциальных ущербов) по множеству вероятных сценариев. Такая методология выглядит достаточно эффективной для финансовых приложений, где доходность финансового портфеля линейно зависит от доходности его компонент.

Однако, ситуация меняется, если средства распределяются по некоторым нефинансовым проектам. Удельная эффективность вложений, как известно, уменьшается (с ростом объема средств), поэтому эффективности проектов являются неубывающими вогнутыми функциями затрат, которые могут быть аппроксимированы кусочно-линейными. В данном случае можно использовать теорию, предложенную в работе [2], где робастность решения оценивается с помощью некоторой полиэдральной меры риска (для подобных функций). Продемонстрируем это на двух модельных портфельных задачах.

Постановка задачи

Пусть имеется список потенциально опасных объектов, которые необходимо модернизировать, усовершенствовать системы безопасности. Как распределить между ними средства для минимизации рисков техногенных влияний от таких объектов?

Пусть имеются (в результате экспертного оценивания, моделирования и пр.):

1) оценки вероятностей соответствующих видов аварий на объектах p_i, $i = 1,..., n$;

2) оценки экономических ущербов соответствующих видов аварий на объектах с учетом их социально-экономических и экологических влияний в местах расположения объектов $L_j, j = 1,..., J$;

3) выбрана хотя бы одна мера риска $\rho(.)$, которая строится на распределениях экономических ущербов от потенциальных аварий на объектах;

4) оценки эффективности вложения средств в объекты некоторыми функциями уменьшения экономических ущербов $\mathrm{W_j}(u)$ от объемов средств u, уменьшающие потенциальные ущербы от аварий на объектах до величины $L_j(u) = L_j - W_j(u)$ (по каждому сценарию i), представленные в виде кусочно-линейной неубывающей вогнутой функции, т. е. $W_j(u) = \min\{a_k^j u_j + b_k^j, k = 1,...., m\}, a_k^j \geq 0, k = 1,..., K_j$.

Такое представление зависит от сценария i развития будущих событий, потому имеет место более точное выражение:

$$W_j^i(u) = \min\{a_k^{ij} u_j + b_k^{ij}, k = 1,..., K_j^i\}, a_k^{ij} \geq 0, k = 1,..., K_j^i. \quad (2.1)$$

Следовательно, для каждого сценария i по каждому объекту j имеем функции потенциальных ущербов $L^i_j(u) = L^i_j - W^i_j(u)$, где W^i_j описывается (2.1).

Постановка задачи распределения средств среди J потенциально опасных объектов *для минимизации риска последствий потенциальных аварий* на них заключается в том, как распределить сумму средств U_0 по объектам, чтобы общая мера их риска от посценарного распределения вектора $\left(-\sum (L_j - W_j(u_j)\right)$ была минимальной?

Более формально,

$$\min_{\sum u_j = U_0, u_j \geq 0} \rho\left(-\sum_{j=1}^{J}(L_j - W_j(u_j))\right). \quad (2.2)$$

Если теперь зафиксировать допустимый уровень ρ_0 для меры риска $\rho(.)$, можно поставить задачу минимизации суммы средств, распределенных по объектам, при допустимом уровне риска:

$$\min \sum u_j$$

$$\rho\left(-\sum_{j=1}^{J}(L_j - W_j(u_j))\right) \leq \rho_0, u_j \geq 0. \quad (2.3)$$

Напомним, что предложенная в [17, с.66-72] полиэдральная мера риска имеет вид

$$\rho(x) = \sup_{p \in Q} < w(x), p >, \quad (2.4)$$

где

$$Q = \{p : Bp \leq c, p \geq 0\}. \quad (2.5)$$

Здесь $w(x)$ – функция, определяющая потенциальные ущербы распределения x, а Q – некоторое множество вероятностных мер (обобщенных вероятностей).

Метод решения

Определим для данного случая функцию ущербов $w(x)$ как $(-x)$, т. е.

$$\rho\left(-\sum_{j=1}^{J}(L_j - W_j(u_j))\right) = \max_{p \in Q} < \sum_{j=1}^{J}(L_j - W_j(u_j)), p >.$$

Обратившись к выражению (2.1), описывающему векторы $W_j(u_j)$, имеем

$$\max_{p \in Q} < \sum_{j=1}^{J}(L_j - \min\{a^j_k u_j + b^j_k, k \in K_j\}), p > = \max_{p \in Q} < \sum_{j=1}^{J} L_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{J} \max\{-a^j_k u_j - b^j_k, k \in K_j\}, p > .$$

С учетом полученного, проблема (2) имеет вид

$$\min_{\sum u_j = U_0, u_j \geq 0} \rho\left(-\sum_{j=1}^{J}(L_j - W_j(u_j))\right) = \min_{\sum u_j = U_0, u_j \geq 0} \max_{p \in Q} < \sum_{j=1}^{J} L_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{J} \max\{-a^j_k u_j - b^j_k, k \in K_j\}, p > .$$

Рассмотрим теперь внутреннюю подзадачу

$$\max_{Bp \leq c, p \geq 0} < \sum_{j=1}^{J} L_j + \sum_{j=1}^{J} \max\{-a^j_k u_j - b^j_k, k \in K_j\}, p > . \quad (3.1)$$

которая линейна по p. Используя аппарат ЛП и условия не пустоты множества Q, нетрудно перейти к двойственной, т. е.

$$\max_{Bp \leq c, p \geq 0} < \sum_{j=1}^{J} L_j + \sum_{j=1}^{J} \max\{-a^j_k u_j - b^j_k, k \in K_j\}, p > =$$

$$= \min_{B^T v \geq \sum_{j=1}^{J} L_j + \sum_{j=1}^{J} \max\{-a^j_k u_j - b^j_k, k \in K_j\}, v \geq 0} < c, v > .$$

Нетрудно видеть, что условия

$$B^T v \geq \sum_{j=1}^{J} L_j + \sum_{j=1}^{J} \max\{-a^j_k u_j - b^j_k, k \in K_j\}$$

эквивалентны следующим:

$$B^T v \geq \sum_{j=1}^{J} L_j - a^j_k u_j - b^j_k, k \in K_j, j \in J.$$

То есть, мы свели внутреннюю подзадачу (3.1) к следующей проблеме ЛП:

$$\min_{B^T v \ge \sum_{j=1}^{J}(L_j - a_k^j u_j - b_k^j),\, v\ge 0,\, k\in K_j,\, j\in J} \langle c, v\rangle .$$

Используя полученное представление подзадачи (3.1) в проблеме (2.2), сведем последнюю к виду

$$\min_{\sum u_j = U_0,\, u\ge 0,\, B^T v \ge \sum_{j=1}^{J}(L_j - a_k^j u_j - b_k^j),\, v\ge 0,\, k\in K_j,\, j\in J} \langle c, v\rangle \quad (3.2)$$

где сформулированная проблема ЛП имеет $\Pi_{j\in J} K_j + 2(1+J)$ ограничений.

Теперь, используя формулировку проблемы (2.2) в виде (3.2), можем переписать задачу (2.3) в виде следующей проблемы ЛП:

$$\min_{u\ge 0,\, \langle c,v\rangle \le \rho_0,\, B^T v \ge \sum_{j=1}^{J}(L_j - a_k^j u_j - b_k^j),\, v\ge 0,\, k\in K_j,\, j\in J} \quad (3.3)$$

Теперь полученные результаты сформулируем в виде следующих выводов.

Выводы

Вывод 1. Проблемы (2.2) и (2.3) могут быть сведены к проблемам ЛП в виде (3.2) и (3.3) соответственно.

Замечание 1. Эти модели несколько усложняются, если сценарные вероятности $p_i, i = 1,\dots,n$ не известны точно, а описываются некоторыми оценками (условия частичной неопределенности). Тогда соответствующие задачи можно свести к некоторым последовательностям задач ЛП с помощью математического аппарата, аналогичного описанному в [1].

Иногда необходимо учитывать не одну меру риска, а несколько. Если ограничиться классом ПКМР, как известно из [3], меры можно строить выбором в (2.5) соответствующих множеств $Q_m = \{p : B_m p \le c_m, p \ge 0\}$, $m = 1,\dots, M$. В этом случае проблема, соответствующая задаче (2.2), становится многокритериальной:

$$\min_{\sum u_j = U_0,\, u_j \ge 0} \begin{pmatrix} \rho_1\left(-\sum_{j=1}^{J}(L_j - W_j(u_j))\right) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \rho_m\left(-\sum_{j=1}^{J}(L_j - W_j(u_j))\right) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

а проблема, аналогичная (2.3), содержит адекватное количество ограничений:

$$\min \sum u_j$$

$$\begin{matrix} \rho_1\left(-\sum_{j=1}^{J}(L_j - W_j(u_j))\right) \le \rho_0^1, u_j \ge 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho_m\left(-\sum_{j=1}^{J}(L_j - W_j(u_j))\right) \le \rho_0^m, u_j \ge 0 \end{matrix} \quad (4.2)$$

Аналогично предыдущему нетрудно получить следующее утверждение.

Вывод 2. Проблема (4.1) может быть сведена к многокритериальной постановке задачи ЛП (4.3), а проблема (4.2) – к задаче ЛП (4.4), имеющим вид:

$$\begin{pmatrix} \min_{\sum u_j = U_0,\, u\ge 0,\, B_1^T v \ge \sum_{j=1}^{J}(L_j - a_k^j u_j - b_k^j),\, v\ge 0,\, k\in K_j,\, j\in J} \langle c_1, v\rangle \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \min_{\sum u_j = U_0,\, u\ge 0,\, B_m^T v \ge \sum_{j=1}^{J}(L_j - a_k^j u_j - b_k^j),\, v\ge 0,\, k\in K_j,\, j\in J} \langle c_m, v\rangle \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\min \sum u_j$$

$$\begin{matrix} u\ge 0, \langle c,v\rangle \le \rho_0^1, B_1^T v \ge \sum_{j=1}^{J}(L_j - a_k^j u_j - b_k^j), v\ge 0, k\in K_j, j\in J \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u\ge 0, \langle c,v\rangle \le \rho_0^m, B_m^T v \ge \sum_{j=1}^{J}(L_j - a_k^j u_j - b_k^j), v\ge 0, k\in K_j, j\in J \end{matrix} \quad (4.4)$$

Модель распределения средств по проектам для уменьшения социально-экономической уязвимости. Рассмотрим еще одну модель, которая близка к предыдущей по форме, но отличается от нее интерпретацией.

Пусть имеются проекты, направленные на уменьшение уязвимости от определенных катастрофических рисков. Это может быть строительство и модернизация гидросооружений по защите прибрежных зон, расчистка русел рек, создание систем оповещения и защиты населения. закупка спасательной техники, укрепление строений и сооружений в соответствующих регионах, целевая поддержка наиболее уязвимых социальных групп и др.

Таким образом, имеем:

1) набор базовых сценариев S_i, $i = 1,..., n$ относительно возникновения и развития катастрофических событий (с учетом разнообразных факторов) с их вероятностями p_i, $i = 1,..., n$;

2) функции полезности (эффективности) $UF_j(u_j), j = 1,....J$ каждого из проектов в зависимости от величины u_j вкладываемых средств (по каждому сценарию);

3) выбрана хотя бы одна мера риска на распределениях функций полезности.

Как и ранее, считаем, что неубывающие вогнутые функции полезности $UF_j(u_j), j = 1,....J$ представляются в виде кусочно-линейных, т. е.

$$UF_j(u_j) = \min\{d_k^j u_j + e_k^j, j = 1,...m\}, d_k^j \geq 0, k = 1,..., K_j. \quad (4.5)$$

Постановка задачи распределения средств среди J проектов *для минимизации социально-экономической уязвимости* заключается в том, как распределить сумму средств U_0 по проектам, чтобы общая мера риска от распределения вектора $\sum UF_j(u_j)$, чьи компоненты u отвечают событиям-сценариям, была минимальной?

Более формально

$$\min_{\sum u_j = U_0, u_j \geq 0} \rho\left(\sum_{j=1}^{J}(UF_j(u_j))\right). \quad (4.6)$$

Если задан допустимый уровень меры риска p_0, можно рассмотреть задачу минимизации суммы распределенных средств при допустимом уровне риска:

$$\rho\left(\sum_{j=1}^{J}(UF_j(u_j))\right) \leq \rho_{0,}\ u_j \geq 0 \ . \quad (4.7)$$

Тогда, используя меру риска из [1] и рассуждения, аналогичные изложенным ранее, можно сделать следующий вывод.

Вывод 3. Проблемы (4.5)-(4.6) и (4.5)-(4.7) могут быть сведены соответственно к следующим задачам ЛП:

$$\min < c,v >$$

$$\sum u_j = U_0, u \geq 0,\ B^T v \geq \sum_{j=1}^{J}(-d_k^j u_j - e_k^j),\ v \geq 0,\ k \in K_j,\ j \in J \quad (4.8)$$

$$\min < c,v >$$

$$u \geq 0, < c,v > \leq \rho_{0,}\ B^T v \geq \sum_{j=1}^{J}(-d_k^j u_j - e_k^j), v \geq 0, k \in K_j,\ j \in J \quad (4.9)$$

Замечание 2. Нетрудно переписать результаты данного вывода в условиях частичной неопределенности с учетом замечания 1, а также для случая, когда используется не одна, а несколько мер риска (аналогично выводу 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Садыгов А.Б.* Робастные методы эллипсоидального оценивания состояния динамических систем при ограничениях на помехи измерения выхода и скорость их изменения. Доклады НАН Азербайджана, 2011, LXVII, № 1, с. 53-62

2. *Садыгов А.Б.* Модели и технологии решения задач управления в чрезвычайных ситуациях. Баку: Элм, 2017, 356 с.

3. *Кирилюк В.С., Бабанин А.С.* Полиэдральные меры риска и робастные решения // Теория оптимальных решений, 2018, № 7, с. 66-72

4. *Ellsberg D.* Risk, Ambiguity and the Savage Axioms // Quarterly Journal of Economics, 2005, p. 643-669

5. *Maccheroni F., Marinacci M., Rustichini A.* Ambiguity Aversion, Robustness, and the Variational Representation of Preference // Econometrica. 2006, p. 1447-1498

6. *Follmer H.* Financial Uncertainty, Risk Measures and Robust Preferences, in Aspects of Mathematical Finance, Marc Yor (ed.). Berlin, Springer, 2008, p. 314

7. *Sriboonchitta S., Wong W.-K., Dhompongsa S., Nguyen H.T.* Stochastic Dominance and Applications to Finance, Risk and Economics. New York, CRC Press, 2010, 438 p.

8. *Walley P.* Towards a Unified Theory of Imprecise Probability // Int. J. Approx. Reason, 2000, 24, p. 125-148

9. *Ermoliev Yu., Hordijk L.* Facets of Robust Decisions, in Coping with Uncertainty: Modeling and Policy Issues, Marti K., Ermoliev Yu., Makowski M., Pflug G. (eds.). Berlin: Springer, 2016, p. 328

10. *Marti K., Ermoliev Yu., Makowski M.* Coping with Uncertainty, Robust Solutions. Berlin: Springer, 2019, 277 p.

11. *Ben-Tal A., Ghaoui L.E., Nemirovski A.* Robust Optimization. Princeton, Princeton University Press, 2009, 542 p.

Институт систем управления НАНА
aminaga.sadigov@gmail.com

RİSKLƏRİ MİNİMALLAŞDIRMAQ ÜÇÜN ROBAST HƏLLƏR

Ə.B.Sadıqov, R.M.Zeynalov

Risk və qeyri-müəyyənlik şəraitində robast həllərin qurulması problemləri araşdırılmışdır. Potensial risklərin minimallaşdırılması üçün vəsaitlərin paylanmasının iki modelinə baxılmışdır. Onların robast həllərinin axtarışı problemləri xətti proqramlaşdırmanın müvafiq məsələlərinə gətirilmişdir.

Açar sözlər: *robast həllər, potensial təhlükəli obyektlər, xətti proqramlaşdırma, qeyri-müəyyənlik şəraiti, risk ölçüsü*

ROBUST SOLUTIONS FOR MINIMIZATION RISKS

A.B.Sadigov, R.M.Zeynalov

Discussed problems of constructing robust solutions in the conditions of risk and uncertainty. Considered two allocations distribution models for minimization of potential risks. Their problems of searching robust solutions are carried out to appropriate linear programming problems.

Keywords: *robust solutions, potential dangerous objects, linear programming, conditions of uncertainty, a measure of risk*