

RİYAZİYYAT

УДК 517.9

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ
В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЕМ

М.А.САДЫГОВ

Бакинский Государственный Университет
misreddin08@rambler.ru

В работе используя класс $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ и $S-(\beta, \delta)$ локально липшицевых отображений в точке получены необходимые условия первого и второго порядков в негладких экстремальных задачах с ограничением.

Ключевые слова: выпуклое множество, липшицева функция, локально липшицевое отображение, банахово пространство.

В [1] определены $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$ и $\varphi-(\alpha, \beta, \nu, \delta)$ локально липшицевые функции в точке в банаховом пространстве, изучен ряд свойств и рассмотрены экстремальные задачи с ограничениями. В [2] в метрическом пространстве определены также $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ -липшицевых отображений в точке, изучен ряд их свойств. В [3] используя функцию расстояния в классах $\varphi-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ локально липшицевых функций в точке, получены ряд теорем о точном штрафе, а также получены необходимые и достаточные условия высокого порядка при наличии ограничений.

Пусть X и Y -банаховы пространства, $C \subset X$, $F: X \rightarrow Y$, $S: X \rightarrow Y$, $f: X \rightarrow R$, $\varphi: X \rightarrow R$, $\alpha > 0$, $\nu > 0$, $\beta \geq \alpha\nu$, $\delta > 0$ и $\omega: R_+ \rightarrow R_+$, где $\omega(0) = 0$, $R_+ = [0, +\infty)$.

Положим $B(x, \delta) = \{y \in X : \|y - x\| \leq \delta\}$, $B = \{y \in X : \|y\| \leq 1\}$.

Отображение F назовем $S-(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ локально липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x} \in X$, если F удовлетворяет условию

$$\|F(\bar{x} + x + y) - F(\bar{x} + x) - S(x + y) + S(x)\| \leq K \|y\|^v \left(\|x\|^{\beta - \alpha v} + \|y\|^{\frac{\beta - \alpha v}{\alpha}} \right) + \omega(\|x\|) \quad (1)$$

при $x, y \in \mathcal{D}B$. Если $\omega(t) \equiv 0$, то отображение F назовем $S - (\alpha, \beta, v, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x}$. Если $\omega(t) \equiv 0$ и $S(x) \equiv 0$, то отображение F назовем $(\alpha, \beta, v, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x}$.

Если существует функция $o: R_+ \rightarrow R_+$, где $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ такая, что $\omega(\|x\|) = o(\|x\|^\beta)$, то $S - (\alpha, \beta, v, \delta, \omega)$ локально липшицевое с постоянной K в точке $\bar{x}$ отображение F назовем $S - (\alpha, \beta, v, \delta, o(\beta))$ локально липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x}$.

Если $F(x) = f(x)$, $S(x) = \varphi(x)$ и отображение F является $S - (\alpha, \beta, v, \delta, \omega)$ локально липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x}$, то функцию f назовем $\varphi - (\alpha, \beta, v, \delta, \omega)$ локально липшицевой с постоянной K в точке $\bar{x}$. Если $\omega(t) \equiv 0$, то функцию f назовем $\varphi - (\alpha, \beta, v, \delta)$ локально липшицевой с постоянной K в точке $\bar{x}$. Если $\omega(t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$, то функцию f назовем $(\alpha, \beta, v, \delta)$ локально липшицевой с постоянной K в точке $\bar{x}$.

Далее считаем, что $S(0) = 0$ и $\varphi(0) = 0$ (если $S(0) \neq 0$, то следует рассмотреть функцию $\tilde{S}(x) = S(x) - S(0)$).

Лемма 1. Если отображение $F: X \rightarrow Y$ является $S_1 + S_2 - (1, \beta, v, \delta, \omega)$ локально липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x}$, S_2 является $(1, \bar{\beta}, v, \delta, \tilde{\omega})$ локально липшицевым с постоянной K в точке нуль, где $\beta \geq \bar{\beta} > 0$, $0 < \delta \leq 1$, то отображение F удовлетворяет $S_1 - (1, \bar{\beta}, v, \delta, \omega + \tilde{\omega})$ локально липшицеву условию с постоянной $2K$ в точке $\bar{x}$.

Подставив $x = 0$ и $\alpha = 1$ из (1) имеем, что

$$\|F(\bar{x} + y) - F(\bar{x}) - S(y)\| \leq K \|y\|^\beta \quad (2)$$

при $y \in \mathcal{D}B$. Отметим, что по условию $\beta > 0$.

Отображение $F: X \rightarrow Y$ удовлетворяющее условию (2) при $y \in \mathcal{D}B$, назовем $S - (\beta, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x}$.

Если $F(x) = f(x)$, $S(x) = \varphi(x)$ и отображение F является $S - (\beta, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x}$, то функцию f назовем $\varphi - (\beta, \delta)$ локально липшицевой с постоянной K в точке $\bar{x}$.

Если функция $f: X \rightarrow R$ удовлетворяет условию $f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) - \varphi(y) \leq K \|y\|^\beta$
 $(-K \|y\|^\beta \leq f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) - \varphi(y))$

при $y \in \delta B$, то функцию f назовем $\varphi - (\beta, \delta)$ локально (нижним) полулипшицевой с постоянной K в точке $\bar{x}$.

Если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha > 0$, где $\alpha \leq \delta$, такое, что

$$f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) - \varphi(y) \leq \varepsilon \|y\|^\beta \quad (-\varepsilon \|y\|^\beta \leq f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) - \varphi(y))$$

при $y \in \alpha B$, то функцию f назовем $\varphi - (\beta, \delta)$ аппроксимативно локально (нижним) полулипшицевой в точке $\bar{x}$.

Если существует функция $o: R_+ \rightarrow R_+$, где $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ такая, что

$$\|F(\bar{x} + y) - F(\bar{x}) - S(y)\| \leq o(\|y\|^\beta)$$

при $y \in \delta B$, то отображение $F: X \rightarrow Y$ назовем $S - (o(\beta), \delta)$ локально липшицевым в точке $\bar{x}$.

Если $F(x) = f(x)$, то положим $S(x) = \varphi(x)$.

Если существует функция $o: R_+ \rightarrow R_+$, где $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ такая, что

$f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) - \varphi(y) \leq o(\|y\|^\beta)$ при $y \in \delta B$, то функцию f назовем $\varphi - (o(\beta), \delta)$ локально верхней полулипшицевой в точке $\bar{x}$.

В лемме 2.4.2 [1] доказано, что если $f(x)$ удовлетворяет условию липшица в $B(\bar{x}, \delta)$, то функция $f(x)$ является $\varphi - (1, \delta)$ аппроксимативно локально полулипшицевой в точке $\bar{x}$, где $\varphi(x) = \sup\{\langle p, x \rangle : p \in \partial_c f(\bar{x})\}$, $\partial_c f(\bar{x})$ субдифференциал Кларка (см.[4]) функции f в точке $\bar{x}$.

Следствие 1. Если отображение $F: X \rightarrow Y$ является $S_1 + S_2 - (\beta, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x}$, S_2 является $(\bar{\beta}, \delta)$ локально липшицевым с постоянной K в точке нуль, где $\beta \geq \bar{\beta} > 0$, $0 < \delta \leq 1$, то отображение F удовлетворяет $S_1 - (\bar{\beta}, \delta)$ локально липшицеву условию с постоянной $2K$ в точке $\bar{x}$.

Пусть $C \subset X$ и $x_0 \in C$. Вектор x называется допустимым направлением множества C в точке x_0 , если найдется такое число $\alpha_0 > 0$, что $x_0 + \alpha x \in C$ для любого $\alpha \in (0, \alpha_0]$. Совокупность всех допустимых направлений в точке x_0 множества C обозначим через $\gamma(x_0; C)$. Замыкание множества $\gamma(x_0; C)$ в X обозначим через $\gamma_1(x_0; C)$, т.е. положим $\gamma_1(x_0; C) = cl \gamma(x_0; C)$. Если $C \subset X$ выпуклое множество, то $\gamma(x_0; C) = \bigcup_{\lambda > 0} \frac{C - x_0}{\lambda}$ и $\gamma_1(x_0; C) = T_c(x_0) = cl \bigcup_{\lambda > 0} \frac{C - x_0}{\lambda}$.

Если $C \subset X$ выпуклое множество, то положим $N_c(x_0) = T_c(x_0)^-$,

т.е. $N_C(x_0)$ нормальный конус к C в точке x_0 (см.[5]).

Рассмотрим минимизацию функции $f_0(x)$ на множестве

$$\{x \in C : f_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m, \Lambda x + y_0 = 0\}, \quad (3)$$

где $f_j : X \rightarrow R, j \in I = \{0, 1, \dots, m\}, \Lambda : X \rightarrow Y, Y$ банахово пространство, $y_0 \in Y$ и $C \subset X$.

Положим $I(x_0) = \{i \in \{1, 2, \dots, m\} : f_i(x_0) = 0\}, \text{Ker } \Lambda = \{x \in X : \Lambda x = 0\}$. Далее для простоты считаем, что $I(x_0) = \{1, 2, \dots, m\}$, т.е. все индексы $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ активны в точке x_0 (см. [6]).

Лемма 2. Если x_0 - точка локального минимума в задаче (3), функции f_i удовлетворяют $\varphi_i - (\beta, \delta)$ локально полулипшицеву условию с постоянной K в точке x_0 при $i \in I$, φ_i положительно однородная функция степени $\bar{\beta}$, где $\beta > \bar{\beta} > 0, f_i(x_0) = 0$ при $i \in \{1, 2, \dots, m\}, \Lambda : X \rightarrow Y$ линейный оператор, то $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in \{z \in \gamma(x_0; C) : \Lambda z = 0\}$.

Следствие 2. Если выполняется условие леммы 2, φ_i непрерывная функция при $i \in I$ и $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейный непрерывный оператор, то $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in cl\{z \in \gamma(x_0; C) : \Lambda z = 0\}$.

Положим $K_C(x_0) = \{x \in X : \exists \lambda_x > 0, \exists o(x, \lambda) : [0, \lambda_x] \rightarrow X, \text{ где } \frac{o(x, \lambda)}{\lambda} \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \downarrow 0, \text{ что } x_0 + \lambda x + o(x, \lambda) \in C\}$ (см.[7]).

Лемма 3. Если x_0 - точка локального минимума в задаче (3), где $\Lambda \equiv 0, y_0 = 0$, функции f_i удовлетворяют липшицеву условию в $B(x_0, \delta)$ с постоянной K и $\varphi_i - (2, \delta)$ локально полулипшицеву условию с постоянной K в точке x_0 при $i \in I$, φ_i положительно однородная функция, $f_i(x_0) = 0$ при $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, то $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in K_C(x_0)$.

Отметим, что если $C = \{x \in X : F(x) = 0\}$, где отображение $F : X \rightarrow Y$ строго дифференцируемо в точке x_0 и $F'(x_0)X = Y$, то $K_C(x_0) = \{z \in X : F'(x_0)z = 0\}$.

Теорема 1. Если $X = R^n$ и $Y = R^s, x_0$ - точка локального минимума в задаче (3), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (2, \delta)$ локально полулипшицеву условию с постоянной K в точке x_0 , где $i \in I, \varphi_i : R^n \rightarrow R$ сублинейные функции при $i \in I, f_i(x_0) = 0$ при $i \in \{1, 2, \dots, m\}, \Lambda : X \rightarrow Y$ линейный оператор и $\gamma(x_0; C)$ выпуклое множество, то существуют одновременно не равные нулю $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y^*$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(x) + \langle y^*, \Lambda x \rangle \geq 0$ при $x \in \gamma(x_0; C)$.

Отметим, что если x_0 - точка локального минимума в задаче (3), функции f_i удовлетворяют $\varphi_i - (\beta_i, \delta)$ аппроксимативно полулипшицеву условию в точке x_0 при $i \in I$, φ_i положительно однородная функция степени $\bar{\beta}_i$, где $\beta_i \geq \bar{\beta}_i > 0$, $\Lambda: X \rightarrow Y$ линейный оператор, то система $\varphi_i(x) < 0$ при $i \in I$ и $\Lambda x = 0$ не имеет решения в $\gamma(x_0; C)$. Поэтому теорема 1 остается верной, если в теореме 1 условие: функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (2, \delta)$ локально полулипшицеву условию с постоянной K в точке x_0 , заменить условием: функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (1, \delta)$ аппроксимативно полулипшицеву условию в точке x_0 .

Рассмотрим минимизацию функции $f_0(x)$ на множестве

$$f_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m, F(x) = 0, \quad (4)$$

где $f_j: B(x_0, \delta) \rightarrow R$, $j \in I = \{0, 1, \dots, m\}$, $F: B(x_0, \delta) \rightarrow Y$ оператор.

Теорема 2. Пусть X и Y банаховы пространства, x_0 - точка локального минимума в задаче (4), функция f_i удовлетворяет $\varphi_i - (2, \delta)$ локально полулипшицеву условию с постоянной K в точке x_0 , где $i \in I$, $\varphi_i: X \rightarrow R$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $f_i(x_0) = 0$ при $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, отображение $F: X \rightarrow Y$ строго дифференцируемо в точке x_0 и $F'(x_0)X = Y$, то существуют $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$ и $y^* \in Y^*$ одновременно не равные нулю и векторы $\bar{x}_i^* \in \partial \varphi_i(x_0)$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i \bar{x}_i^* + F'(x_0)^* y^* = 0$.

В работе используя теоремы Люстерника-Грейвса (см. [8]) или теоремы Банаха об открытом отображении (см. [11]) доказана бесконечный вариант теоремы Фана, которая далее применяется к получению необходимых условий в экстремальной задаче.

Рассмотрим минимизацию функции $f_0(x)$ на множестве

$$f_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m, \|F(x)\| \leq \varepsilon, x \in C, \quad (5)$$

где $f_j: B(x_0, \delta) \rightarrow R$, $j \in I = \{0, 1, \dots, m\}$, $F: B(x_0, \delta) \rightarrow Y$ оператор, Y банахово пространство, $C \subset X$.

Лемма 4. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что x_0 - точка локального минимума в задаче (5) и $F(x_0) = 0$, функции f_i удовлетворяют $\varphi_i - (\beta_i, \delta)$ локально полулипшицеву условию с постоянной K в точке x_0 при $i \in I$, φ_i положительно однородная функция степени $\bar{\beta}_i$, $f_i(x_0) = 0$ при $i \in \{1, \dots, m\}$, отображение $F: X \rightarrow Y$ удовлетворяет $S - (\beta_0, \delta)$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 , S положительно однородный оператор степени $\bar{\beta}_0$, где $\beta_i > \bar{\beta}_i > 0$ при $i \in I$, то система

$\varphi_i(x) < 0$ при $i \in I$ и $S(x) = 0$ не имеет решения в $\gamma(x_0; C)$.

Отметим, что, если $\varphi_i(x)$ при $i \in I$ выпуклые функции, $S(x)$ линейный оператор и $\gamma(x_0; C)$ выпуклый конус, то применяя теорему Фана при $X = R^n$, а кроме того, если $\text{int } \gamma(x_0; C) \neq \emptyset$, $\text{Im } S = Y$, $S(x)$ непрерывный оператор, аналог теореме Фана (см.[9]) при условии леммы 4 можно получить необходимое условие локального минимума для задачи (5).

Лемма 5. Если $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейный непрерывный сюръективный оператор, $\varphi_i : X \rightarrow R$ сублинейные непрерывные функции при $i \in \{0, 1, \dots, m\}$, $C \subset X$ выпуклое множество, $x_0 \in C$, $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i(x) \geq 0$ при $x \in \{z \in T_C(x_0) : \Lambda z = 0\}$, то

$$g(y, a) = \begin{cases} \inf_{x \in T_C(x_0), \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i(x) + a_i) & \text{если } T_C(x_0) \cap \Lambda^{-1}(-y) \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{если } T_C(x_0) \cap \Lambda^{-1}(-y) = \emptyset \end{cases}$$

сублинейная функция в $Y \times R^{m+1}$, а если кроме того $\text{int } T_C(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$, то $T_C(x_0) \cap \Lambda^{-1}(-y) \neq \emptyset$ при $y \in Y$ и $g(y, a)$ сублинейная непрерывная функция в $Y \times R^{m+1}$, где $\text{Ker } \Lambda = \{x \in X : \Lambda x = 0\}$.

Обозначим $\tilde{C} = \text{int } C \cup \{x_0\}$, $S_C(x_0) = \bigcup_{\lambda > 0} \frac{\tilde{C} - x_0}{\lambda}$, $g_a(x) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) + \delta_{T_C(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda}(x)$, где $a \in R^{m+1}$, $a = (a_0, a_1, \dots, a_m)$, $I = \{0, 1, \dots, m\}$, $g_a^*(p) = \sup_{x \in X} \{ \langle p, x \rangle - g_a(x) \}$, где $p \in X^*$.

Теорема 3. Если X и Y банаховы пространства, x_0 - точка локального минимума в задаче (3), $\beta > 2$, функции f_i , $i \in I$, удовлетворяют $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (\beta, \delta)$ локально полулипшицеву условию с постоянной K в точке x_0 , $\varphi_i^1 : X \rightarrow R$ сублинейные непрерывные функции и $f_i(x_0) = 0$ при $i \in I$, $\varphi_i^2 : X \rightarrow R$ положительные однородные степени 2 функции при $i \in I$ и удовлетворяют $(1, 2, 1, \delta, o(2))$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль, $\Lambda : X \rightarrow Y$ линейный непрерывный сюръективный оператор, C выпуклое множество, $\text{int } T_C(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$ и $\partial g_a^*(0) \neq \emptyset$ при $a \in R^{m+1}$, то существуют $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$, где $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$, $x_i^* \in \partial \varphi_i^1(0)$ при $i \in I$, $y^* \in Y^*$ и $x^* \in N_C(x_0)$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i x_i^* + \Lambda^* y^* + x^* = 0$ и

$$E(h) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^1(h) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, x_i^* \in \varphi_i^1(0), y^* \in Y^*, \right.$$

$$\left. x^* \in N_C(x_0), \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^* + x^* = 0 \right\} \geq 0$$

при $h \in D = \{x \in X : \varphi_i^1(x) \leq 0, i = 0, 1, \dots, m, \Lambda x = 0, x \in S_C(x_0)\}$.

Обозначим $\bar{g}_a(x) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i)$, где $a \in R^{m+1}$.

Теорема 4. Если X банахово пространство, x_0 - точка локального минимума в задаче (3), где $\Lambda \equiv 0$, $y_0 = 0$, $C = X$, $f_i(x_0) = 0$ при $i \in I$, функция f_i , $i \in I$, удовлетворяет $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 , $\varphi_i^1: X \rightarrow R$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $\varphi_i^2: X \rightarrow R$ удовлетворяют $(1, 2, 1, \delta, o(2))$ локально липшицеву условию в точке нуль, и положительные однородные степени 2 функции при $i \in I$, $\partial \bar{g}_a^*(0) \neq \emptyset$ при $a \in R^{m+1}$, то существуют $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$, где $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ и $x_i^* \in \partial \varphi_i^1(0)$ такие, что $\sum_{i=0}^m \alpha_i x_i^* = 0$ и

$$E(h) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, x_i^* \in \partial \varphi_i^1(0), \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i^* = 0 \right\} \geq 0$$

при $h \in D_1 = \{x \in X : \varphi_i^1(x) \leq 0, i = 0, 1, \dots, m\}$.

Рассмотрим минимизацию функции $f_0(x)$ на множестве

$$f_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m, F(x) = 0, \quad x \in C \quad (6)$$

где $f_j: B(x_0, 2\delta) \rightarrow R$, $j \in I = \{0, 1, \dots, m\}$, $F: B(x_0, 2\delta) \rightarrow Y$ оператор, $C \subset B(x_0, 2\delta)$.

Множество гиперкасательных (касательных) векторов к множеству C в точке $x_0 \in C$ обозначим через $I_C(x_0)$ (см.[4], с.59) ($T_C(x_0)$). Обозначим $N_C(x_0) = T_C(x_0)^\perp$ (см.[4], с.54).

Положим $H = \{x \in X : \varphi_i^1(x) \leq 0, i = 0, 1, \dots, m, F'(x_0)x = 0, x \in I_C(x_0)\}$, $g_{(a,y)}(x) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) + \delta_{T_C(x_0) \cap \Lambda^{-1}(-y)}(x)$, где $(a, y) \in R^{m+1} \times Y$, $a = (a_0, a_1, \dots, a_m)$, $\Lambda x = F'(x_0)x$.

Теорема 5. Если X и Y банаховы пространства, x_0 - точка локального минимума в задаче (6), $f_i(x_0) = 0$ при $i \in I$, функции f_i , $i \in I$, удовлетворяют $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально верхней полулипшицеву условию в точке x_0 , $\varphi_i^1: X \rightarrow R$ сублинейные непрерывные функции при $i \in I$, $\varphi_i^2: X \rightarrow R$ положительные однородные степени 2 функции и удовлетворяют $(1, \mu, 1, \delta)$, где $\mu > 1$, (или $(1, 2, 1, \delta, o(2))$) локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль при $i \in I$, отображение $F: X \rightarrow Y$ строго дифференцируемо в точке x_0 , $F'(x_0)X = Y$ и F удовлетворяет $F'(x_0)x + S(x) - (o(2), \delta)$ локально липшицеву условию в точке x_0 , $S: X \rightarrow Y$ положительный однородный степени 2 оператор и удовлетворяет $(1, \mu, 1, \delta)$ (или $(1, 2, 1, \delta, \tilde{o}(2))$) локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль, $\partial g_{(a,y)}^*(0) \neq \emptyset$ при $(a, y) \in R^{m+1} \times Y$, $C \subset X$ и $I_C(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$, где $\Lambda x = F'(x_0)x$, то

$$E(h) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) + \langle y^*, S(h) \rangle : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), \right.$$

$$\left. y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^* = 0 \right\} \geq 0$$

при $h \in H \cup \{0\}$.

Доказательство. Пусть $t \geq 0, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$. Так как $\varphi_i^2 : X \rightarrow R$ удовлетворяет $(1, \mu, 1, \delta)$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль, то

$$|\varphi_i^2(t_1 x_1 + t_2 x_2) - \varphi_i^2(x_1)| \leq K t_2 \|x_2\| (t_2^{\mu-1} \|x_2\|^{\mu-1} + \|t_1 x_1\|^{\mu-1})$$

при $x_1, x_2 \in X, t_1 \|x_1\| \leq \delta, t_2 \|x_2\| \leq \delta$. Поэтому $|\varphi_i^2(tx)| \leq K t^\mu \|x\|^\mu$ при $t \|x\| \leq \delta, i \in I$, где $\mu > 1$. По условию функции $f_i, i \in I$, удовлетворяют $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$ локально полулипшицеву условию в точке x_0 . Поэтому

$$f_i(x_0 + tx) \leq \varphi_i^1(tx) + \varphi_i^2(tx) + o(t^2 \|x\|^2) \leq \varphi_i^1(tx) + K t^\mu \|x\|^\mu + o(t^2 \|x\|^2)$$

при $x \in X, t \|x\| \leq \delta$ и $i \in I$. Так как $S : X \rightarrow Y$ удовлетворяет $(1, \mu, 1, \delta)$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке нуль, где $\mu > 1$, то

$$\|S(t_1 x_1 + t_2 x_2) - S(t_1 x_1)\| \leq K t_2 \|x_2\| (t_2^{\mu-1} \|x_2\|^{\mu-1} + \|t_1 x_1\|^{\mu-1})$$

при $x_1, x_2 \in X, t_1 \|x_1\| \leq \delta, t_2 \|x_2\| \leq \delta$. Поэтому $\|S(tx)\| \leq K t^\mu \|x\|^\mu$ при $x \in X, t \|x\| \leq \delta$.

Из неравенства $\|F(x_0 + tx) - F(x_0) - F'(x_0)tx - S(tx)\| \leq o(t^2 \|x\|^2)$ при $x \in X, t \|x\| \leq \delta$ имеем, что $\|F(x_0 + tx) - F'(x_0)tx - F(x_0)\| \leq K t^\mu \|x\|^\mu + o(t^2 \|x\|^2)$ при $x \in X, t \|x\| \leq \delta$. Тогда из замечания теоремы 4.3[9] следует, что $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i^1(x) \geq 0$ при $x \in T_C(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda$.

Пусть $h \in H$. Рассмотрим задачу

$$\max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(h)) \rightarrow \inf, \quad x \in T_C(x_0), \quad \Lambda x + S(h) = 0.$$

Положим $a_i = \varphi_i^2(h), y = S(h)$ и $g(y, a) = \inf_{x \in T_C(x_0), \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i)$. Из леммы 1.4 [10] следует, что $(y^*, b) \in \partial g(0, 0)$ в том и только в том случае, когда существуют $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ такие, что $-\Lambda^* y^* \in \sum_{i=0}^m \alpha_i \partial \varphi_i^1(0) + N_C(x_0)$ и $b = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Поэтому

$$\partial g(0, 0) = \{(y^*, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0),$$

$$y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0\}.$$

По теореме Хермандера (см.[11, с.203]) имеем, что $g(y, a) = \sup_{(y^*, \lambda) \in \partial g(0, 0)} (\langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i)$.

Так как $\partial g_{(a, y)}^*(0) \neq \emptyset$ при $(a, y) \in R^{m+1} \times Y$, то существует точка $x = \xi(h)$,

где $x \in T_c(x_0)$, $\Lambda x + S(h) = 0$ такая, что

$$\begin{aligned} g(y, a) &= \inf_{x \in T_c(x_0), \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi(h)) + \varphi_i^2(h)) = \\ &= \sup_{(y^*, \lambda) \in \partial g(0, 0)} (\langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i) = \sup \{ \langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \\ p_i &\in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_c(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} E(h) &= g(S(h), \varphi^2(h)) = \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi(h)) + \varphi_i^2(h)) = \sup \{ \langle y^*, S(h) \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) : \lambda_i \geq 0, \\ \sum_{i=0}^m \lambda_i &= 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_c(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \}, \end{aligned}$$

где $\varphi^2(h) = (\varphi_0^2(h), \varphi_1^2(h), \dots, \varphi_m^2(h))$, $\Lambda \xi(h) + S(h) = 0$.

Так как F удовлетворяет $F'(x_0)x + S(x) - o(2, \delta)$ локально липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 , то

$$\|F(x_0 + th + t^2 \xi) - F(x_0) - \Lambda(th + t^2 \xi) - S(th + t^2 \xi)\| \leq o(\|th + t^2 \xi\|^2)$$

при $t \in [0, t_0]$, где $t_0 = \min\{1, \frac{\delta}{\|h\| + \|\xi\| + 1}\}$. Поэтому из соотношения $\Lambda h = 0$ и $\Lambda \xi + S(h) = 0$ вытекает, что

$$\|F(x_0 + th + t^2 \xi) - F(x_0) + S(th) - S(th + t^2 \xi)\| \leq o(\|th + t^2 \xi\|^2)$$

при $t \in [0, t_0]$. Отсюда имеем, что

$$\begin{aligned} \|F(x_0 + th + t^2 \xi)\| &\leq \|S(th + t^2 \xi) - S(th)\| + o(\|th + t^2 \xi\|^2) \leq \\ &\leq K t^2 \|\xi\| (\|th\|^{\mu-1} + \|t^2 \xi\|^{\mu-1}) + o(\|th + t^2 \xi\|^2) = o_1(t^2) \end{aligned}$$

при $t \in [0, t_0]$, где $\frac{o_1(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. По теореме Люстерника [12, с.33] существуют $r: R_+ \rightarrow X$ и число $m > 0$ такие, что $F(x_0 + th + t^2 \xi + r(t)) = 0$, $\|r(t)\| \leq m \|F(x_0 + th + t^2 \xi)\| = o_2(t^2)$ при $t \in [0, t_0]$, где $r(t) = x(x_0 + th + t^2 \xi)$, $o_2(t) = m o_1(t)$, $\frac{o_2(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$.

Кроме того имеем, что существует число $t_1 > 0$, где $t_1 \leq t_0$, такое, что

$$f_i(x_0 + th + t^2 \xi + r(t)) - f_i(x_0) - \varphi_i^1(th + t^2 \xi + r(t)) - \varphi_i^2(th + t^2 \xi + r(t)) \leq o(\|th + t^2 \xi + r(t)\|^2)$$

при $t \in [0, t_1]$. По условию $\varphi_i^1(x)$ сублинейная непрерывная функция в X . Тогда существует число $c > 0$ такое, что $|\varphi_i^1(x)| \leq c \|x\|$ при $x \in X$ и $i \in I$.

Поэтому $\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t^2} \varphi_i^1(r(t)) = \lim_{t \downarrow 0} \varphi_i^1(\frac{1}{t^2} r(t)) = 0$, т.е. $\varphi_i^1(r(t)) = o_3(t^2)$, где $\frac{o_3(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. Тогда отсюда следует, что

$$f_i(x_0 + th + t^2 \xi + r(t)) - f_i(x_0) \leq \varphi_i^1(th + t^2 \xi + r(t)) + \varphi_i^2(th + t^2 \xi + r(t)) - \varphi_i^2(th) +$$

$$+ \varphi_i^2(th) + o(\|th + t^2\xi + r(t)\|^2) \leq \varphi_i^1(th) + \varphi_i^1(t^2\xi) + \varphi_i^1(r(t)) + o(\|th + t^2\xi + r(t)\|^2) + \\ + K\|t^2\xi + r(t)\|(\|th\|^{\mu-1} + \|t^2\xi + r(t)\|^{\mu-1}) + \varphi_i^2(th) \leq t^2\varphi_i^1(\xi) + t^2\varphi_i^2(h) + o_4(t^2)$$

при $t \in [0, t_1]$, где $\frac{o_4(t)}{t} \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$. Положив $f(x) = \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x)$ имеем, что $f(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) = \max_{0 \leq i \leq m} f_i(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) \leq t^2 \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(\xi) + \varphi_i^2(h)) + o_4(t^2)$ при $t \in [0, t_1]$.

Так как $h \in I_C(x_0)$, то по определению $I_C(x_0)$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $x_0 + th + t^2\xi + r(t) \in C$ при $t \in [0, \alpha_0]$.

Если допустить, что $E(h) < 0$, то имеем $f(x_0 + th + t^2\xi + r(t)) < 0$ при малых $t > 0$. Так как x_0 - точка локального минимума в задаче (2), то получим противоречие. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. - Баку, - 1996, - 148 с.
2. Садыгов М.А. Задачи на экстремум с ограничениями в метрическом пространстве. ДАН, - 2013, - т. 452, - №5, - с.490-493.
3. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. LAP LAMBERT Academic Publishing. Deutschland, - 2014, - 359 p.
4. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. - Москва: Наука, -1988, - 280 с.
5. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. - Москва: Мир, - 1988, - 510 с.
6. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. - Москва: Наука, - 1982, - 432 с.
7. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. - Москва: Наука, - 1979, - 429 с.
8. Иоффе А.Д. Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление. // Успехи математических наук, 2000, т.55, вып. 3, с.103-162.
9. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума в локально выпуклом пространстве.// Spirit time.-2019.-2(14), с.44-55.
10. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума второго порядка в локально выпуклом пространстве.// Spirit time.-2019.-2(14), с.31-43.
11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - Москва: Наука, - 1974, - 479 с.
12. Алексеев В.М., Галаев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. - Москва: Наука, - 1984, - 288 с.

MƏHDUDIYYƏTLİ EKSTREMAL MƏSƏLƏDƏ ZƏRURİ ŞƏRTLƏR HAQQINDA

M.A.САДЫГОВ

XÜLASƏ

İşdə nöqtədə $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ və $S - (\beta, \delta)$ lokal lipşis şərtini ödəyən inikaslar sinfindən istifadə edilərək, Banax fəzasında məhdudiyyətli ekstremal məsələdə birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: qabarıq çoxluq, lipşis funksiya, lokal lipşis inikas, banax fəzası.

ON THE NECESSARY CONDITIONS IN EXTREMUM PROBLEMS WITH CONSTRAINT

M.A.SADYGOV

SUMMARY

In the work using $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$ and $S - (\beta, \delta)$ local Lipschitz mappings at the point, first and second order necessary extremum conditions are obtained for nonsmooth extreme problems with constraint in the Banach space.

Keywords: convex set, lipschitz function, local Lipschitz mapping, Banach space.