

**УДК 514.763****PARAMETRİK XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMANIN BÖYÜK  
ÖLÇÜLÜ BİR MƏSƏLƏSİ VƏ ONUN HƏLLİ****R.H.HƏMİDOV, N.K.ALLAHVERDİYEVƏ*****Bakı Dövlət Universiteti******shakiamidov@gmail.com***

*Parametrik məsələnin böyük ölçülü olması onun həlli üçün standart olmayan xüsusi yanaşmalar tələb edir. Əksər hallarda belə yanaşmalar həll olunacaq məsələnin xüsusi strukturunu nəzərə almaqla işlənir. İşdə xətti proqramlaşdırmanın tətbiqi əhəmiyyət daşıyan böyük ölçülü parametrik məsələsi tədqiq olunur. Məsələnin əsasında Leontyevin məlum çoxsahəli dinamik balans modeli dayanır.*

**Açar sözlər:** Leontyev modeli, xətti proqramlaşdırma məsələsi, parametrik məsələ, Pareto həll, Pareto sərhədi.

**1. Giriş**

Parametrik xətti proqramlaşdırma böyük ölçülü məsələ olduqda ölçünün yaratdığı problemləri onun standart yolla həlli zamanı aradan qaldırmaq daha da çətin olur. İşdə belə məsələlərdən birinə baxılır. Məsələnin böyük ölçülü olması iki səbəbdəndir. Birinci səbəb dəyişənlərinin sayının çox olmasıdır və bu dəyişənlərin əmsallarının məsələnin matrisindəki mövcud durumunun standart ayrılış sxemlərinin məsələnin həllində gözlənilən effektin alınması üçün əlverişli olmamasıdır. İkinci səbəb isə dəyişənlərin zamanın funksiyası olmasıdır. Məsələni diskret hala gətirən zaman yeni alınan məsələdəki dəyişənlərin sayı əvvəlki sayla zamanın bölgü nöqtələrinin sayının hasilinə bərabər olur. Nəticədə çox böyük ölçülü parametrik xətti proqramlaşdırma məsələsini həll etməli oluruq. Bu zaman həll prosesində qurulması tələb olunan optimal bazis həllərin sayı kəskin artır. Hər bir belə həll isə öz növbəsində böyük ölçülü xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllini tələb edir, yəni çox böyük ölçülü simpleks cədvəlin Jourda-Qauss yoxetməsi ilə ardıcıl olaraq çox sayda çevrilməsini tələb edir. Təqdim olunan işdə məqsəd bu cür çevirmədən yan keçməklə məsələnin daha effektiv həll yolunu göstərməkdir. Təklif olunan həll sxemində tələb olunan hesablamaların əsas hissəsini sadə iterasiyadan çox da fərqlənməyən iterativ yolla icra edirik. Bu

yol isə bütün tələb olunan informasiyanın işləməsini paralel alqoritmlə icra etməyə imkan verir. Təklif olunan həll sxeminin ədədi misal üzərində icrası nümayiş etdirilir. Baxılan misal istifadə olunan həll sxeminin standart yolla həll sxemindən necə fərqləndiyi və onun daha effektiv olması haqda müəyyən müsbət fikir yaratmağa imkan verir.

## 2. Məsələnin qoyuluşu

Aşağıdakı formada təqdim olunan məsələyə baxırıq:

$$\begin{aligned} x^i &\leq A^i x^i + B^i (x^i - x^{i-1}) + b^{1i} + \lambda b^{2i}, \\ x^i &\leq d^{1i} + \lambda d^{2i}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$x^i \geq 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^r c^i x^i \rightarrow \max.$$

Burada  $I \in R^{n \times n}$ - vahid matrisdir;  $A^i, B^i \in R^{n \times n}, c^i, d^{1i}, d^{2i}, b^{1i}, b^{2i}, x^i \in R^n, i = \overline{1, r}$ .

Aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi tələb olunur:

- 1)  $A^i + B^i \geq 0$ ; 2)  $(I - A^i - B^i)^{-1} \geq 0$ ; 3)  $B^i (d^{1i} + \lambda d^{2i}) \leq b^{1i} + \lambda b^{2i}$ ;
- 4)  $b^{1i} + \lambda b^{2i} \geq 0$ ; 5)  $d^{1i} + \lambda d^{2i} \geq 0$ ;  $c^i \geq 0$ ;  $i = \overline{1, r}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$ .

Məsələ (1)-ə sahələrarası dinamik balans modeli əsasında qurulan xətti proqramlaşdırmanın parametrik məsələsi kimi də baxıla bilər. Bu halda  $\lambda$ - parametri sahələr üzrə istehsalın intensivliyinə qoyulan məhdudiyyətlə və son məhsula tələbatla bağlı qeyri-müəyyənliyi əks etdirir. Statik halda və  $\lambda = 0$  olduqda məsələ (1) [2]-də ətraflı öyrənilmişdir.

## 3. Həll sxeminin şərhı

Məsələ (1)-ə qoşma olan məsələyə baxaq:

$$y^i (I - A^i - B^i) + z^i \geq c^i, \quad y^i, z^i \geq 0, \quad i = \overline{1, r} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^r y^i (b^{1i} + \lambda b^{2i} - B^i x^{i-1}) + \sum_{i=1}^r z^i (d^{1i} + \lambda d^{2i}) \rightarrow \min$$

$\bar{x}(\lambda) = (\bar{x}^1(\lambda), \bar{x}^2(\lambda), \dots, \bar{x}^r(\lambda))$  məsələ (1)-in optimal həlli olsun, yəni istənilən  $\lambda^0 \in [0, 1]$  üçün  $\bar{x}(\lambda^0)$  məsələ (1)-in  $\lambda = \lambda_0$  olduqda optimal həllidir.

Fərz edək ki, optimal  $x(\lambda), \lambda \in [0, 1]$  həllərinin hamısının koordinatları müsbətdir və onlar bazis dəyişənlərdir. Başqa sözlə  $x(\lambda), \lambda \in [0, 1]$  nöqtələri məsələ (1)-in mümkün həllər çoxluğu  $X$ -in təpə nöqtələridir.  $(\bar{x}^{1i}, \bar{x}^{2i}, \dots, \bar{x}^{ri}) = \bar{x}^i \in X, \quad i = \overline{1, k}$  ilə bu təpə nöqtələrini işarə edək.  $\Lambda_i \subset [0, 1]$  ilə  $\bar{x}^i$ -ni optimal edən  $\lambda \in [0, 1]$  qiymətləri çoxluğunu işarə edək.

Onda yazıla bilər:

$$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^k \Lambda_i.$$

Fərz edəcəyik ki,

$$\Lambda_i = [\lambda_i, \lambda_{i+1}), \quad i = \overline{1, k}, \quad (\lambda_1 = 0, \lambda_{k+1} = 1).$$

Onda məsələ (1)-in həllini  $(\bar{x}^i, \Lambda_i), i = \overline{1, k}$  kimi də təqdim edə bilərik. Məqsədimiz məsələ (1)-in  $x(\lambda), \lambda \in [0, 1]$  həllini  $(x^i, \Lambda_i), i = \overline{1, k}$  kimi göstərməkdir.  $x^i > 0, i = \overline{1, k}$  olduğundan məsələ (2)-ni ona ekvivalent formada xətti proqramlaşdırmanın ikinci teoreminə əsaslanaraq aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$y^i(I - A^i - B^i) + z^i = c^i, \quad y^i, z^i \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^r y^i(b^{1i} + \lambda b^{2i} - Bx^{i-1}) + \sum_{i=1}^r z^i(d^{1i} + \lambda d^{2i}) \rightarrow \min$$

Yeni alınmış məsələdən  $z^i, i = \overline{1, r}$  dəyişənlərini kənarlaşdıraraq:

$$y^i(I - A^i - B^i) \leq c^i, \quad y^i \geq 0, i = \overline{1, r},$$

$$\sum_{i=1}^r y^i(b^{1i} - B^i x^{i-1} + \lambda b^{2i}) + \sum_{i=1}^r c^i - y^i(I - A^i - B^i)(d^{1i} + \lambda d^{2i}) \rightarrow \min.$$

Bu məsələni aşağıdakı kimi də yazı bilərik:

$$y^i(I - A^i - B^i) \leq c^i, \quad y^i \geq 0, i = \overline{1, r}, \quad (3)$$

$$F(y, \lambda) = \sum_{i=1}^r y^i e^i + \sum_{i=1}^r c^i d^{1i} + \lambda \sum_{i=1}^r y^i f^i + \sum_{i=1}^r c^i d^{2i} \rightarrow \max, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Burada  $e^i = (I - A^i - B^i)d^{1i} + B^i x^{i-1} - b^{1i}, f^i = (I - A^i - B^i)d^{2i} - b^{2i}, i = \overline{1, r}.$

$\lambda^0 \in [0, 1]$  üçün məsələ (3)-ün bazis optimal təpə nöqtəsini  $\bar{Y}^0$  ilə işarə edək:  $\bar{Y}^0 = (\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^r)$ . Onda  $\lambda = \lambda^0$  olduqda məsələ (1)-in aşağıdakı sistemdən optimal təpə nöqtəsini təyin edə bilərik (ikili teoremə əsaslanaraq).

$$x_j^i = (A^i x^i + B^i(x^i - x^{i-1}) + b^{1i} + \lambda_0 b^{2i})_j, \quad \bar{y}_j^i > 0 \text{ olduqda,}$$

$$x_\eta^i = (d^{1i} + \lambda d^{2i})_\eta, \quad \bar{y}_\eta^i = 0 \text{ olduqda } i = \overline{1, r}, j, \eta = \overline{1, n}.$$

Beləliklə, məsələ (1)-in həllini məsələ (3)-ün həllinə gətirmiş oluruq.

İki kriteriyalı

$$y^i(I - A^i - B^i) \leq c^i, \quad y^i \geq 0, \quad i = \overline{1, r}$$

$$y_1 = f_1(y) = \sum_{i=1}^r y^i e^i \rightarrow \max, \quad y_2 = f_2(y) = \sum_{i=1}^r y^i(e^i + f^i) \rightarrow \max. \quad (4)$$

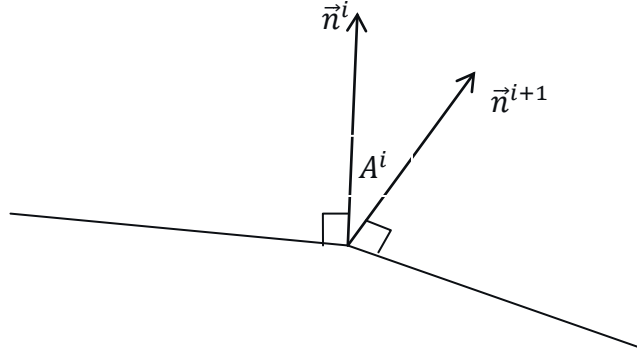
məsələsinə baxaq. Məsələnin mümkün həllər çoxluğunu  $Y$  ilə işarə edək. Onun Pareto sərhədini isə  $Y^P$  kimi işarə edək.  $Y^P$  sərhədi müstəvidə çökük ciddi azalan funksiyanın qrafikini ifadə edir. Bu qrafikin sol ucunu  $L(y_1^p, y_2^p)$ , sağ ucunu isə  $S(y_1^s, y_2^s)$  kimi işarə edək. Onda aşağıdakı doğrudur.

$$y_2^p = \max_{y \in Y} f_2(y), \quad y_1^s = \max_{y \in Y} f_1(y).$$

$Y^P$  hissə-hissə sınıq xəttidir. Onun sınma nöqtələrini  $A^1, A^2, \dots, A^t$  kimi işarə edək.  $A^i$  sınma nöqtəsini təyin edən bazis  $\bar{Y}^i$  təpə nöqtəsini götürək. Onda

$A^i$  sınıma nöqtəsinə görə  $\bar{Y}^i$ -ni optimal edən  $\lambda$ -nın  $[0, 1]$ -dəki bütün  $\Lambda_i$  qiymətləri çoxluğunu asanlıqla təyin edə bilərik:

$$\Lambda_i = \{\lambda \vec{n}^i + (1 - \lambda)n^{i+1} | 0 \leq \lambda \leq 1\}$$



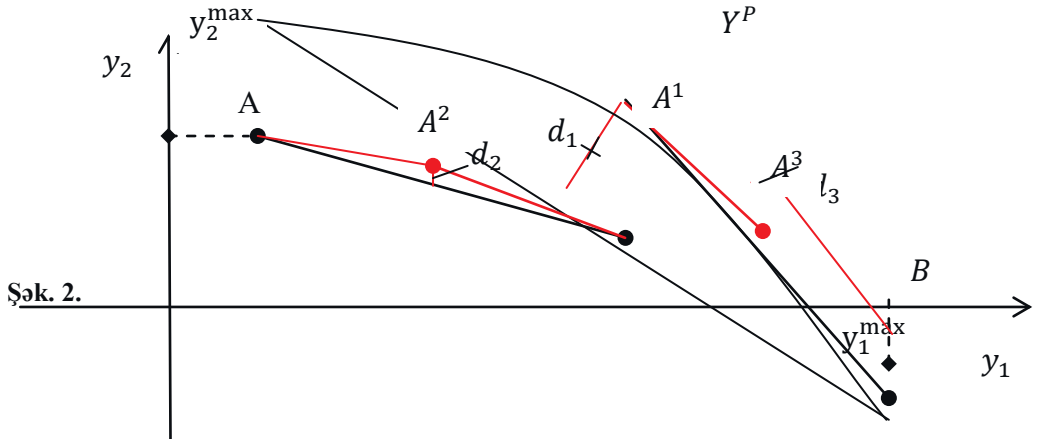
Şəkil 1.

Burada  $\vec{n}^i = (n_1^i, n_2^i)$  və  $n_1^i + n_2^i = 1$ .

#### **Pareto sərhəddi $Y^P$ -nin qurulma sxeminin qrafiki şərh.**

Sadəlik üçün  $Y^P$  sərhəddini hamar, çökük azalan funksiyanın qrafiki şəklində aşağıdakı kimi götürək və onun üzərində  $Y^P$ -nin qurulma sxemini şərh edək (bax şəkil 2).

Əvvəlcə  $f_2(y) \rightarrow \max, y \in Y$  məsələsini həll edib onun optimal  $y_2^{op}$  həllinin köməyi ilə  $A = (f_1(y_2^{op}), f_2(y_2^{op}))$  nöqtəsini qururuq. Anoloji olaraq  $f_1(y) \rightarrow \max, y \in Y$  məsələsini həll etməklə  $B$  nöqtəsini qururuq.  $Y^P$  sərhəddini qərar qəbul edəni razı salan  $\varepsilon$  dəqiqliklə quracağıq.  $\varepsilon$ - dəqiqlik iki mənada təklif oluna bilər – müntəzəm yaxınlaşma mənasında və integral mənada [1]. Birinci mənaya görə şərhimizi davam etdirəcəyik.



Şəkil 2.

**Addım 1.**  $AB$ -yə perpendikulyar və  $Y^P$ -yə tərəf yönələn  $\vec{n}^{(1)} = (n_1^{(1)}, n_2^{(1)})$  və  $n_1^{(1)}, n_2^{(1)} \geq 0, n_1^{(1)} + n_2^{(1)} = 1$  vektorunu götürüb, onun əsasında

$$n_1^{(1)} f_1(y) + n_2^{(1)} f_2(y) \rightarrow \max, y \in Y$$

məsələsinin  $y^{(1)}$  optimal həllinin köməyi ilə  $Y^P$  üzərindəki nöqtələrdən  $AB$ -dən ən uzaqda yerləşənini təyin edirik. Şək.2-də bu  $A^1$  nöqtəsidir.  $d_1 < \varepsilon$  olarsa, onda  $AA^1B$  sınıq xəttini  $Y^P$  -nin  $\varepsilon$  dəqiqliklə aproksimasiyasını qəbul edəcəyik və onu  $Y_\varepsilon^P$  kimi işarə edəcəyik.  $d_1 > \varepsilon$  olduqda isə  $AA^1$  və  $A^1B$  parçalarını  $AB$  kimi götürüb, addım 2-yə keçid alırıq.

**Addım 2.**  $AA^1$  -dən maksimum uzaqlıqda və  $Y^P$  -də yerləşən  $A^2$  nöqtəsini və bu xassəyə malik  $A^1B$  üçün  $A^3$  nöqtələrini qururuq (bax şəkl. 2).  $A^2$  -nin  $AA^1$  -dən,  $A^3$  -ün  $A^1B$  -dən məsafələrini uyğun olaraq  $d_1$  və  $d_2$  kimi adlandıraraq. Əgər  $d_1$  və  $d_2$  qiymətlərindən hər hansı biri  $\varepsilon$  -nu aşmazsa, onda bu hissəni  $Y_\varepsilon^P$  -nün bir hissəsi kimi qəbul edirik. Əks halda addım 1-i ödənilməyən hissə üçün davam etdiririk.  $\max(d_2, d_3) < \varepsilon$  olduqda  $Y_\varepsilon^P$  olaraq  $AA^2A^1A^3B$  sınıq xəttini qəbul edəcəyik. Şəkildən də görünür ki,  $d_i$  qiymətləri addımdan addıma azalır və bu azalma sürətlə baş verir.  $Y_\varepsilon^P$  -nün sınıma  $A^i$  nöqtələri üçün  $\Lambda_i \subset [0,1], \Lambda_i \cap \Lambda_{i+1} = \emptyset$  kimi çoxluqları tərtib edib, sınıma nöqtələrini təqdim edən  $\bar{y}^i \in Y$  bazis təpə nöqtələri ilə birlikdə düzələn  $(\bar{y}^i, \Lambda_i)$ ,  $i = \bar{1}, \bar{k}$  çütlər çoxluğunu verilmiş məsələnin həlli kimi qəbul edirik.  $Y_\varepsilon^P$  -nün sınıma nöqtələri nə qədər az olsa, məsələ bir o qədər az hesablama tələb edəcəkdir. Bu say isə  $\varepsilon$  -da asılı olaraq dəyişə bilər.

#### 4. Ədədi misal

Məsələ (1) üçün ədədi verilənləri aşağıdakı kimi götürək:

$$A^1 = A^2 = A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad B^1 = B^2 = B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$d^{11} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad d^{12} = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad b^{11} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad b^{12} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix},$$

$$d^{21} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad d^{22} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad b^{21} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad b^{22} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$c^1 = (4 \quad 1 \quad 2), \quad c^2 = (3 \quad 2 \quad 1).$$

(1)- (4) şərtlərinin ödənilməsi asanlıqla yoxlanılır.

Verilənlərə uyğun məsələ (1)-ə qoşma olan məsələ (3)-ü tərtib edək. Bu məsələdə aşağıdakı ifadələri ilkin verilənlərə əsasən hesablayaq.

$$I - A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \\
e^1 &= (I - A^1 - B^1)d^{11} + B^1x^0 - b^{11} = (I - A - B)d^{11} - b^{11} = \\
&= \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -22 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x^0 = 0, \quad e^1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -22 \\ -1 \end{pmatrix}. \\
e^2 &= \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + Bx^1 = \begin{pmatrix} -34 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} + Bx^1.
\end{aligned}$$

$x^1$  –in hesablanması.  $X^1$  –i hesablamaq üçün  $\lambda = 0$  olmaqla məsələ (3)-dən alınan

$y^1 = (I - A^1 - B^1) \leq c^1, \quad y^1 \geq 0, \quad y^1 e^1 \rightarrow \max$   
məsələsini həll edirik və onun optimal bazisini qururuq.

$$\begin{aligned}
0.7y_1^1 - 0.4y_2^1 - 0.1y_3^1 &\leq 4, \\
-0.3y_1^1 + 0.7y_2^1 - 0.2y_3^1 &\leq 1, \\
-0.2y_1^1 - 0.1y_2^1 + 0.5y_3^1 &\leq 2, \\
y_1^1 &\geq 0, \quad y_2^1 \geq 0, \quad y_3^1 \geq 0, \\
9y_1^1 - 22y_2^1 - y_3^1 &\rightarrow \max.
\end{aligned}$$

$y_1^1, y_2^1, y_3^1$  dəyişənlərində  $y_1^1, y_3^1$  dəyişənləri optimal bazis dəyişənləridir. Optimal  $\bar{y}^1$  həllin  $\bar{y}_1^1, \bar{y}_3^1$  kordinatları isə

$$\begin{aligned}
0.7y_1^1 - 0.1y_3^1 &= 4, \\
-0.2y_1^1 + 0.5y_3^1 &= 2.
\end{aligned}$$

sistemindən  $\bar{y}_1^1 = \frac{20}{3}, \quad \bar{y}_2^1 = \frac{20}{3}$  olaraq alırıq. Xəttili proqramlaşmanın ikinci ikili teoreminə əsasən  $x^1$  –in koordinatlarını

$$\begin{aligned}
0.7x_1^1 - 0.2x_3^1 &= 3 + 10, \\
-0.2x_1^1 + 0.5x_3^1 &= 2 + 10
\end{aligned}$$

sistemindən  $x_1^1 = 25\frac{2}{7}, \quad x_2^1 = 10, \quad x_3^1 = 24$  olaraq tapırıq. Onda

$$e^2 = \begin{pmatrix} -34 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25\frac{2}{7} \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8.46 \\ 6.93 \\ 7.33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25.54 \\ 4.93 \\ -3.67 \end{pmatrix}$$

$f_1$  və  $f_2$  –ni hesablayaq:

$$\begin{aligned}
f^1 &= (I - A - B)d^{21} - b^{21} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -10 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$f^2 = (I - A - B)d^{22} - b^{22} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 22 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -23 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Beləliklə, ədədi verilənlərlə məsələ (3)-ü aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$\begin{aligned} 0.7y_1^1 - 0.4y_2^1 - 0.1y_3^1 &\leq 4, \quad y_1^1 \geq 0 \\ -0.3y_1^1 + 0.7y_2^1 - 0.2y_3^1 &\leq 1, \quad y_2^1 \geq 0 \\ -0.2y_1^1 - 0.1y_2^1 + 0.5y_3^1 &\leq 2, \quad y_3^1 \geq 0 \\ 0.7y_1^2 - 0.4y_2^2 - 0.1y_3^2 &\leq 3, \quad y_1^2 \geq 0 \\ -0.3y_1^2 + 0.7y_2^2 - 0.2y_3^2 &\leq 2, \quad y_2^2 \geq 0 \\ -0.2y_1^2 - 0.1y_2^2 + 0.5y_3^2 &\leq 1, \quad y_3^2 \geq 0 \\ 9y_1^1 - 22y_2^1 - y_3^1 - 25.54y_1^2 + 4.93y_2^2 - 3.67y_3^2 + \\ + \lambda(-20y_1^1 + 3y_2^1 + 3y_3^1 + 17y_1^2 - 23y_2^2 + 8y_3^2) &\rightarrow \max \end{aligned}$$

İndi isə məsələ (4)-ün ədədi verilənlərlə ifadəsini yazıq:

Əvvəlcə  $e^i + f^i, i = 1, 2$  ifadələrini hesablayırıq:

$$e^1 + f^1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -22 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -19 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$e^2 + f^2 = \begin{pmatrix} -25.54 \\ 4.93 \\ -3.67 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 \\ -23 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.54 \\ -18.73 \\ 4.33 \end{pmatrix}$$

Onda məsələ (4) aşağıdakı kimi iki kriteriyalı məsələ olacaqdır.

$$\begin{aligned} 0.7y_1^1 - 0.4y_2^1 - 0.1y_3^1 &\leq 4, \quad y_1^1 \geq 0 \\ -0.3y_1^1 + 0.7y_2^1 - 0.2y_3^1 &\leq 1, \quad y_2^1 \geq 0 \\ -0.2y_1^1 - 0.1y_2^1 + 0.5y_3^1 &\leq 2, \quad y_3^1 \geq 0 \\ 0.7y_1^2 - 0.4y_2^2 - 0.1y_3^2 &\leq 3, \quad y_1^2 \geq 0 \\ -0.3y_1^2 + 0.7y_2^2 - 0.2y_3^2 &\leq 2, \quad y_2^2 \geq 0 \\ -0.2y_1^2 - 0.1y_2^2 + 0.5y_3^2 &\leq 1, \quad y_3^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} y_1 = f_1(y) &= 9y_1^1 - 22y_2^1 - y_3^1 - 25.54y_1^2 + 4.93y_2^2 - 3.67y_3^2 \rightarrow \max, \\ y_2 = f_2(y) &= -11y_1^1 - 19y_2^1 + 2y_3^1 - 8.54y_1^2 - 18.73y_2^2 + 4.33y_3^2 \rightarrow \max. \end{aligned}$$

$Y$  məsələ (5)-in mümkün həlləri çoxluğu olsun. Məsələnin qiymətləndirmələr çoxluğu

$$Z = \{(y_1, y_2) | y_1 = f_1(y), y_2 = f_2(y), y \in Y\} \subset R^2$$

müstəvidə çoxbucaqlı təyin edəcəkdir. Bu çoxbucaqlının sərhədinin bir hissəsi  $(y_1, y_2) \in Z, y_1 \rightarrow \max, y_2 \rightarrow \max$  məsələsinin Pareto sərhədi  $Z^P$ -ni ifadə edəcəkdir. Bu sərhəd hissə-hissə xətti, kəsilməz, ciddi azalan və çökük funksiyanın qrafikini təqdim edəcəkdir. Bu qrafikin sağ ucunu  $A$ , sol ucunu  $B$  kimi işarə edək və bu nöqtələri quraq.

$$\max_{y \in Z} f_1(y) = f_1(y^0) = y_1^0, \quad \max_{y \in X} f_2(y) = f_2(y^*) = y_2^* \quad \text{olsun.}$$

$$\text{Onda } f_2(y^0) = y_2^0, f_1(y^*) = y_1^* \text{ olduğunu qəbul etsək } A = (y_1^0, y_2^0),$$

$$B = (y_1^*, y_2^*) \text{ uc nöqtələrini qurmuş oluruq.}$$

$\max_{y \in Z} f_1(y)$  məsələsinin optimal  $y^0$  həllini aşağıdakı tənliklər sisteminin həllindən tapırıq:

$$0.7y_1^1 - 0.1y_3^1 = 4,$$

$$-0.2y_1^1 + 0.5y_3^1 = 2,$$

$$y_2^1 = 0,$$

$$0.7y_2^2 = 2$$

$$y_1^2 = 0,$$

$$y_3^2 = 0,$$

$$y^0 = \left(\frac{20}{3}, 0, \frac{20}{3}, 0, \frac{20}{7}, 0\right).$$

$y^0$ -ın ifadəsini  $f_1(y)$  və  $f_2(y)$  -də  $y$  -in yerinə yazıb  $A(y_1^0 y_2^0)$  nöqtəsinin  $R^2$  -dəki yerini təyin edək.

$$y_1^0 = 9 \frac{20}{3} - \frac{20}{3} + 4.93 \frac{20}{7} = 68 \frac{4}{21},$$

$$y_1^0 = -11 \frac{20}{3} + 2 \frac{20}{3} - 18.73 \frac{20}{7} = -113 \frac{18}{35},$$

$$A = \left(68 \frac{4}{21}, -113 \frac{18}{35}\right).$$

$\max_{y \in Z} f_2(y)$  məsələsinin optimal  $y^*$  həllini

$$0.5y_3^1 = 2,$$

$$y_1^1 = 0,$$

$$y_2^1 = 0,$$

$$0.5y_3^2 = 1$$

$$y_1^2 = 0,$$

$$y_2^2 = 0,$$

sisteminin həllindən tapırıq.

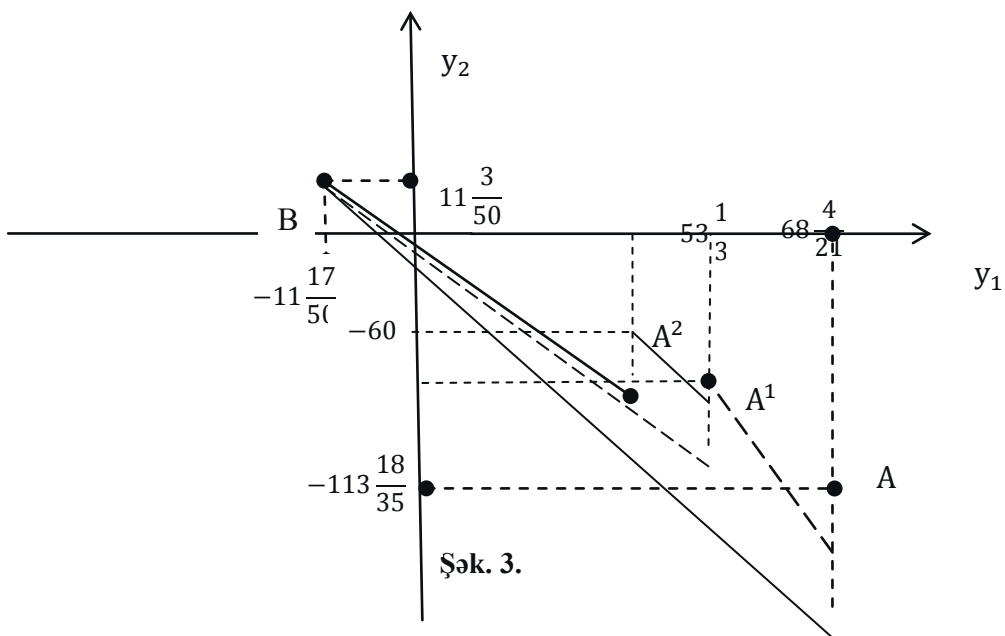
$$y^* = (0, 0, 4, 0, 0, 2).$$

Onda,

$$y_1^* = f_1(y^*) = -4 - 3.67 \cdot 2 = -11.34,$$

$$y_2^* = f_2(y^*) = 2 \cdot 4 + 4.33 \cdot 2 = 11.06$$

$$B = (-11.34, 11.06).$$



Şək. 3.

$A$  və  $B$  nöqtələrini qurmaqla həll prosesinin ilk addımını bitmiş hesab edəcəyik. Növbəti addımda Pareto sərhəddi  $Z^P$  üzərində olub  $AB$  –dən maksimum uzaqlıqda olan  $A^1$  nöqtəsini quracağıq. Qurmanı [2]-dəki sxemə nəzərən icra edəcəyik. Əvvəlcə

$$\overrightarrow{AB} = \left( -11,34 - 68 \frac{4}{21}, 11,06 + 113 \frac{18}{35} \right) = (-79,5 \quad 124,6)$$

Sonra isə

$$y \in Z, \quad 124,6 \cdot y_1 + 79,5y_2 \rightarrow \max$$

məsələsinin optimal  $y^{op}$  həllindən istifadə edərək  $A^1$  nöqtəsi alaraq  $(f_1(y^{op}), f_2(y^{op}))$  nöqtəsini götürürük.

$$\begin{aligned} 124,6 \cdot y_1 + 79,5y_2 &= 124,6(9y_1^1 - 22y_2^1 - y_3^1 - 25,54y_1^2) + \\ &+ 4,93y_2^2 - 3,67y_3^2 + 79,5(-11y_1^1 - 19y_2^1 + 2y_3^1 - 8,54y_1^2 - \\ &- 18,73y_2^2 + 4,33y_3^2) = 247y_1^1 - 4252y_2^1 + 34,4y_3^1 - \\ &- 3861y_1^2 - 874y_2^2 - 113y_3^2. \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$y \in Z, \quad 247y_1^1 - 4252y_2^1 + 34,4y_3^1 - 3861y_1^2 - 874y_2^2 - 113y_3^2 \rightarrow \max$$

məsələsinin optimal  $y^0 = \left( \frac{20}{3}, 0, \frac{20}{3}, 0, 0, 0 \right)$  həllini  $(f_1(y^{op}), f_2(y^{op}))$  –də yerinə yazıb  $A^1 = \left( 53 \frac{1}{3}, -60 \right)$  nöqtəsini qururuq.

İndi isə  $AB$  –ni  $A^1B$  ilə əvəz edib  $AB$  üçün olan əməliyyatı  $A^1B$  üçün icra edirik.

$$\overrightarrow{AA^1} = \left( 53 \frac{1}{3} - 68 \frac{4}{21}, -60 + 113 \frac{18}{35} \right) = \left( -15, 53 \frac{1}{2} \right)$$

Pareto sərhədinin növbəti sınma nöqtəsini tapmaq üçün

$53.5y_1 + 15y_2 \rightarrow \max, \quad (y_1, y_2) \in Z$   
məsələsinin optimal həllini hesablasaq alırıq:

$$y^{op} = \left( \frac{20}{3}, 0, \frac{20}{3}, 0, 0, 0 \right)$$

$y^{op}$  –nin bu ifadəsini  $(f_1(y^{op}), f_2(y^{op}))$  –da yerinə yazıb yeni

$A^2 = (41.5, -51.3)$  alırıq. Sonrakı hesablamaların yeni sınıma nöqtəsi verilmədiyindən  $Z^P$  –nin  $BA^2A^1A$  sınıq xəttindən təşkil olunduğunu alırıq.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели. – Москва: ЮНИТИ, - 2000, - 391с.
2. Мееров М.В. Исследование и оптимизации многосвязанных систем управления. – Москва: Наука, - 1986.

#### ОБ ОДНОЙ БОЛЬШОЙ ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ЕЁ РЕШЕНИЕ

Р.Г.ГАМИДОВ, Н.К.АЛЛАХВЕРДИЕВА

#### РЕЗЮМЕ

Большой размерность параметрической задачи требует нестандартные, специальные подходы для её решения. Часто, такой подход разрабатывается с учетом специальной структуры решаемой задачи. В работе исследуется большая параметрическая задача линейного программирования, которая имеет практическая задача. На основе задачи лексит известная динамическая модель межотраслевого баланса Леонтьева.

**Ключевые слова:** модель Леонтьева, задача линейного программирования, параметрическая задача, Парето решение, Парето границы.

#### ON SOLUTION OF ONE LARGE-SCALE PARAMETRIC PROGRAMMING

R.H.HAMIDOV, N.K.ALLAHVERDIYEVA

#### SUMMARY

The large parametric programming problems requires non-standart special approaches to its solution. In most cases such an approach is implemented taking into account the specific structure of the problem to be solved. One large-scale linear parametric problem of the practical application is considered. The issue is based on Leontiyev's well known inter- sectoral dynamic balance model.

**Keywords:** Leontiyev's model, linear programming problem, parametric problem, Pareto solution, Pareto boundary