

UOT 514.763

**(0,2) TIPLİ TENZOR REPERLƏRİNİN LAYLANMASINDA
BƏZİ STRUKTURLARIN TƏDQIQI****H.D.FƏTTAYEV, A.B.BƏŞİRLİ***Bakı Dövlət Universiteti**h-fattayev@mail.ru**ayten.bashirli1997@gmail.com*

İşdə (0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanması təyin olunur, bazada verilən vektor meydanlarının bu laylanma fəzasına tam və horizontal liftləri qurulur, onların əsas xassələri və aralarındakı əsas münasibət öyrənilir.

Açar sözlər: tenzor reperi, afin rabitə, laylanma, horizontal lift, əyrilik tenzoru, kommutator.

1. Giriş

Diferensiallanan çoxobrazlı üzərində reperlərin və koreperlərin, o cümlədən afinor ((1,1) tipli tenzor) reperlərinin laylanmalarında müxtəlif strukturların tədqiqi Mok, Kordero, de Leok, Səlimov, Fəttayev və başqalarının işlərində aparılmışdır (bax, məsələn, [1],[2],[3],[4]). Təqdim olunan işin əsas məqsədi (0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanmasının təyin olunması və bu laylanmada vektor meydanlarının liftlərini öyrənməkdən ibarətdir.

İkinci bölməsində diferensiallanan çoxobrazlı üzərində (0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanması təyin olunur. Üçüncüdə vektor meydanlarının (0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanmasına tam lifti ilə bağlı məsələyə baxılır, tam liftin xassələri öyrənilir. Dördüncü bölmədə bazada verilən vektor meydanlarının (0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanmasının horizontal lifti qurulur, xassələri tədqiq olunur.

Məqalədə baxılan çoxobrazlıların və onlar üzərindəki strukturların C^∞ sinifindən olması nəzərdə tutulur. A,B,C,... indekslərinin birdən $n + n^4$ -ə qədər, $i, j, k, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ indekslərinin 1-dən n -ə qədər, $i_{\alpha_1 \alpha_2}, j_{\beta_1 \beta_2}, k_{\gamma_1 \gamma_2}, \dots$ indekslərinin isə $n + 1$ -dən $n + n^4$ -ə qədər qiymətlər alırlar. M çoxobrazlısı üzərində lokal koordinat sistemi (U, x^i) şəklində yazılır, burada U – koordinat ətrafıdır, x^i – lokal koordinatdır. $\frac{\partial}{\partial x^i}$ xüsusi diferensiallanma qısa-

lıq xətinə ∂_i şəklində yazılır. V, W vektor meydanlarının kommutatoru $[V, W]$ kimi işarə olunur.

2. (0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanması

C^∞ sinfindən olan hamar M çoxobrazlısına baxaq və fərz edək ki, $T_2^0(x)$ - $x \in M$ nöqtəsində (0,2) tipli tenzorlar fəzasıdır. $T_2^0(x)$ xətti fəzasının $(X^{11}, \dots, X^{1n}, \dots, X^{n1}, \dots, X^{nn}) = A_x$ bazisini (0,2) tipli tenzor reperi adlandırırıq. M hamar çoxobrazlısının bütün nöqtələrində bütün (0,2) tipli tenzor reperlərinin çoxluğunu $L_2^0(M)$ simvolye ilə işarə edirik. Təbii $\pi: L_2^0(M) \rightarrow M$ proyeksiyası $A_x \rightarrow x$ şəklində təyin olunur. $L_2^0(M)$ çoxluğunda $n + n^4$ ölçülü, C^∞ sinfindən olan hamar çoxobrazlı strukturu aşağıdakı kimi daxil edilir.

Fərz edək ki, (U, x^i) M hamar çoxobrazlısı üzərində lokal koordinat sistemidir. Onda $L_2^0(U) = \pi^{-1}(U)$ çoxluğu U ətrafının bütün nöqtələrindəki bütün (0,2) tipli tenzor reperlərini öz daxilində saxlayır. $A_x \in L_2^0(U)$ tenzor reperini birqiyəmətlili olaraq

$$X^{\alpha_1 \alpha_2} = X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} (dx^{i_1})_x \otimes (dx^{i_2})_x$$

şəklində ayırmaq olar. Buradan belə bir nəticəyə gəlirik ki, $\{L_2^0(U), (x^i, X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2})\}$ - $L_2^0(U)$ çoxluğu üzərində lokal koordinat sistemidir. Bu koordinat sistemini doğrulmuş koordinat sistemi adlandırırıq. Tutaq ki, (U, x^i) və $(U', x^{i'})$ - M hamar çoxobrazlısı üzərində $U \cap U'$ kəsişməsində

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n) \quad (2.1)$$

çevrilməsi ilə əlaqəli olan lokal koordinat sistemləridir. Onda $L_2^0(U) \cap L_2^0(U')$ kəsişməsində $\{L_2^0(U), (x^i, X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2})\}$ və $\{L_2^0(U'), (x^{i'}, X_{i'_1 i'_2}^{\alpha_1 \alpha_2})\}$ doğrulmuş koordinat sistemləri

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n) \\ X_{i'_1 i'_2}^{\alpha_1 \alpha_2} = A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2} X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \end{cases} \quad (2.2)$$

çevrilmələri ilə əlaqəli olar, burada $A_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ - (2.1) çevrilməsinin tərsi olan

$$x^i = x^i(x^{i'}, \dots, x^{n'})$$

çevrilməsinin Yakobi matrisinin elementləridir. Aparılan mühakimələrdən aydın olur ki, $L_2^0(M)$ - $(n + n^4)$ - ölçülü, C^∞ sinfindən olan hamar çoxobrazlıdır, $(L_2^0(M), \pi, M)$ üçlüyü isə laylanmadır. Bu laylanmanı (0,2) tipli tenzor reperlərinin laylanması adlandırırıq.

Sadəlik üçün $(x^I) = (x^i, x^{i_{\alpha_1 \alpha_2}}) = (x^i, X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2})$ işarələməsini daxil edirik. Buradan aydın olur ki,

$$\begin{aligned} i, j, k, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots &= 1, 2, \dots, n; i_{\alpha_1 \alpha_2}, j_{\beta_1 \beta_2}, k_{\gamma_1 \gamma_2}, \dots \\ &= n + 1, n + 2, \dots, n + n^4; I, J, K, \dots = 1, 2, \dots, n + n^4. \end{aligned}$$

(2.2) çevrilməsinin Yakobi matrisi aşağıdakı struktura malikdir:

$$(A^{I'}) = \left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I} \right) = \begin{pmatrix} A_{i'}^{i'} & 0 \\ \partial_i (A_{i_1}^{i_1} A_{i_2}^{i_2}) X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} & A_{i_1}^{i_1} A_{i_2}^{i_2} \delta_{\sigma_1}^{\alpha_1} \delta_{\sigma_2}^{\alpha_2} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

3. Vektor meydanlarının tam lifti

Tutaq ki, $V - M$ hamar çoxobrazlısının üzərində verilmiş vektor meydanıdır və $V = V^i \partial_i$, yəni $V^i - U$ koordinat ətrafında V vektor meydanının komponentləridir.

Teorem 3.1.

$${}^c V = ({}^c V^i, {}^c V^{i_{\alpha_1 \alpha_2}}) = (V^i, -X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_1} V^m - X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_2} V^m) \quad (3.1)$$

obyekti $(0,2)$ tipli $L_2^0(M)$ tenzor reperlərinin laylanması üzərində vektor qanunu ilə çevrilir.

İsbatı. Göstərməliyik ki, (2.2) çevrilməsi zamanı

$${}^c V^{I'} = A_{I'}^{I'} {}^c V^I \quad (3.2)$$

bərabərliyi ödənilir. Əvvəlcə $I' = i'$ halına nəzər yetirək. Bu halda (3.2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadəni aşağıdakı kimi çevirmək olar:

$$A_{i'}^{i'} {}^c V^{i'} = A_{i'}^{i'} {}^c V^i + A_{i_{\alpha_1 \alpha_2}}^{i'} {}^c V^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} = A_{i'}^{i'} V^i = V^{i'} = {}^c V^{i'},$$

Başqa sözlə desək, (3.2) bərabərliyi ödənilir.

$I' = i'_{\alpha_1 \alpha_2}$ halında isə (3.2) bərabərliyinin sol tərəfi üçün yaza bilərik:

$$\begin{aligned} {}^c V^{i'} &= {}^c V^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} = -X_{m' i_2'}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_1'} V^{m'} - X_{i_1' m'}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_2'} V^{m'} = -X_{m' i_2'}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_1'} V^m) A_{m'}^{m'} \\ &\quad - X_{m' i_2'}^{\alpha_1 \alpha_2} V^m \partial_{i_1'} A_{m'}^{m'} - X_{i_1' m'}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_2'} V^m) A_{m'}^{m'} - X_{i_1' m'}^{\alpha_1 \alpha_2} V^m \partial_{i_2'} A_{m'}^{m'} \\ &= \sum_{k=1}^4 a_k, \end{aligned}$$

burada

$$a_1 = -X_{m' i_2'}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_1'} V^m) A_{m'}^{m'},$$

$$a_2 = -X_{m' i_2'}^{\alpha_1 \alpha_2} V^m \partial_{i_1'} A_{m'}^{m'},$$

$$a_3 = -X_{i_1' m'}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_2'} V^m) A_{m'}^{m'},$$

$$a_4 = -X_{i_1' m'}^{\alpha_1 \alpha_2} V^m \partial_{i_2'} A_{m'}^{m'}.$$

Digər tərəfdən, baxılan halda (3.2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadəni aşağıdakı kimi çevirmək olar:

$$\begin{aligned} A_{I'}^{I'} {}^c V^{I'} &= A_{i'}^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} {}^c V^i + A_{i_{\sigma_1 \sigma_2}}^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} {}^c V^{i_{\sigma_1 \sigma_2}} \\ &= \partial_i (A_{i_1}^{i_1} A_{i_2}^{i_2}) X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} V^i + A_{i_1}^{i_1} A_{i_2}^{i_2} \delta_{\sigma_1}^{\alpha_1} \delta_{\sigma_2}^{\alpha_2} (-X_{m i_2}^{\sigma_1 \sigma_2} \partial_{i_1} V^m) \\ &\quad + A_{i_1}^{i_1} A_{i_2}^{i_2} \delta_{\sigma_1}^{\alpha_1} \delta_{\sigma_2}^{\alpha_2} (-X_{i_1 m}^{\sigma_1 \sigma_2} \partial_{i_2} V^m) = \sum_{l=1}^4 b_l, \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned} b_1 &= X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_i A_{i_1'}^{i_1}) A_{i_2'}^{i_2} V^i, \\ b_2 &= X_{i_1 i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} A_{i_1'}^{i_1} (\partial_i A_{i_2'}^{i_2}) V^i, \\ b_3 &= -X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} A_{i_1'}^{i_1} A_{i_2'}^{i_2} \partial_{i_1} V^m, \\ b_4 &= -X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} A_{i_1'}^{i_1} A_{i_2'}^{i_2} \partial_{i_2} V^m \end{aligned}$$

işarə olunmuşdur. Asanlıqla yoxlanılır ki,

$$a_1 = b_3, \quad a_2 = b_1, \quad a_3 = b_4, \quad a_4 = b_2. \quad (3.3)$$

(3.3) münasibətləri (3.2) bərabərliyinin ödənildiyini göstərir. Beləliklə, ${}^cV - L_2^0(M)$ laylanmasının üzərində təyin olunmuş tenzor meydanıdır. Teorem isbat olundu.

cV vektor meydanına V vektor meydanının $L_2^0(M)$ laylanmasına V vektor meydanının tam lifti deyəcəyik.

Teorem 3.2. *İstənilən $V, W \in T_0^1(M)$ vektor meydanları üçün*

$${}^c[V, W] = [{}^cV, {}^cW] \quad (3.4)$$

bərabərliyi doğrudur.

İsbatı. Göstərəcəyik ki,

$${}^c[V, W]^I = [{}^cV, {}^cW]^I. \quad (3.5)$$

$I = i$ halında (3.5) bərabərliyinin sağ tərəfi aşağıdakı kimi çevrilər:

$$\begin{aligned} [{}^cV, {}^cW]^I &= [{}^cV, {}^cW]^i = {}^cV^L \partial_L {}^cW^i - {}^cW^L \partial_L {}^cV^i \\ &= {}^cV^l \partial_l {}^cW^i + {}^cV^{l\gamma_1\gamma_2} \partial_{l\gamma_1\gamma_2} {}^cW^i - {}^cW^l \partial_l {}^cV^i \\ &\quad - {}^cW^{l\gamma_1\gamma_2} \partial_{l\gamma_1\gamma_2} {}^cV^i = V^l \partial_l W^i - W^l \partial_l V^i = [V, W]^i \\ &= [V, W]^i, \end{aligned}$$

yəni baxılan halda (3.5) bərabərliyi ödənilir.

$I = i_{\alpha_1 \alpha_2}$ halına baxaq. Bu halda (3.5) bərabərliyinin sol tərəfi aşağıdakı ifadəyə çevrilmiş olur:

$$\begin{aligned} {}^c[V, W]^I &= {}^c[V, W]^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} = \\ &= -X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_1} (V^l \partial_l W^m - W^l \partial_l V^m) - X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_2} (V^l \partial_l W^m - W^l \partial_l V^m). \end{aligned}$$

Asanlıqla müəyyən etmək olur ki, sonuncu ifadə aşağıdakı hədlərin cəminə bərabərdir:

$$\begin{aligned} c_1 &= -X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_1} V^l) \partial_l W^m, \\ c_2 &= -X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} V^l \partial_{i_1} \partial_l W^m, \\ c_3 &= X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_1} W^m) \partial_l V^m, \\ c_4 &= X_{m i_2}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_1} \partial_l V^m) W^l, \\ c_5 &= -X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_2} V^l) \partial_l W^m, \\ c_6 &= -X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} V^l \partial_{i_2} \partial_l W^m, \end{aligned}$$

$$c_7 = X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} (\partial_{i_2} W^l) \partial_l V^m,$$

$$c_8 = X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} W^l \partial_{i_2} \partial_l V^m.$$

Digər tərəfdən (3.5) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadəni aşağıdakı şəkildə yazmaq mümkündür:

$$\begin{aligned} [{}^c V, {}^c W]^l &= [{}^c V, {}^c W]^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} = {}^c V^L \partial_L {}^c W^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} - {}^c W^L \partial_L {}^c V^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} \\ &= {}^c V^l \partial_l {}^c W^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} + {}^c V^{l_{\gamma_1 \gamma_2}} \partial_{l_{\gamma_1 \gamma_2}} {}^c W^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} - {}^c W^l \partial_l {}^c V^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} \\ &\quad - {}^c W^{l_{\gamma_1 \gamma_2}} \partial_{l_{\gamma_1 \gamma_2}} {}^c V^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} \\ &= V^l \partial_l (-X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_1} W^m - X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_2} W^m) \\ &\quad + (-X_{rl_2}^{\gamma_1 \gamma_2} \partial_{i_1} V^r - X_{l_1 r}^{\gamma_1 \gamma_2} \partial_{i_2} V^r) (-\delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_m^{l_1} \delta_{i_2}^{l_2} \partial_{i_1} W^m \\ &\quad - \delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_{i_1}^{l_1} \delta_m^{l_2} \partial_{i_2} W^m) - W^l \partial_l (-X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_1} V^m - X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_2} V^m) \\ &\quad - (-X_{rl_2}^{\gamma_1 \gamma_2} \partial_{i_1} W^r - X_{l_1 r}^{\gamma_1 \gamma_2} \partial_{i_2} W^r) (-\delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_m^{l_1} \delta_{i_2}^{l_2} \partial_{i_1} V^m \\ &\quad - \delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_{i_1}^{l_1} \delta_m^{l_2} \partial_{i_2} V^m). \end{aligned}$$

Sonuncu ifadə aşağıdakı hədlərin cəmindən ibarətdir:

$$\begin{aligned} d_1 &= -V^l X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_l \partial_{i_1} W^m, \\ d_2 &= -X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} V^l \partial_l \partial_{i_2} W^m, \\ d_3 &= X_{ri_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_m V^r \partial_{i_1} W^m, \\ d_4 &= X_{rm}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_1} V^r \partial_{i_2} W^m, \\ d_5 &= X_{mr}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_2} V^r \partial_{i_1} W^m, \\ d_6 &= X_{i_1 r}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_m V^r \partial_{i_2} W^m, \\ d_7 &= X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} W^l \partial_l \partial_{i_1} V^m, \\ d_8 &= X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} W^l \partial_l \partial_{i_2} V^m, \\ d_9 &= -X_{ri_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_m W^r \partial_{i_1} V^m, \\ d_{10} &= -X_{rm}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_1} W^r \partial_{i_2} V^m, \\ d_{11} &= -X_{mr}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{i_2} W^r \partial_{i_1} V^m, \\ d_{12} &= -X_{i_1 r}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_m W^r \partial_{i_2} V^m. \end{aligned}$$

Asanlıqla yoxlamaq olur ki,

$$c_1 = d_9, \quad c_2 = d_1, \quad c_3 = d_3, \quad c_4 = d_7, \quad c_5 = d_{12},$$

$$c_6 = d_2, \quad c_7 = d_6, \quad c_8 = d_8, \quad d_4 + d_{11} = 0, \quad c_5 + d_{10} = 0.$$

Sonuncu münasibətlər göstərir ki, baxılan halda da (3.5) bərabərliyi ödənilir. Beləliklə, isbat olundu.

4. Vektor meydanlarının horizontal lifti

Fərz edək ki, $\nabla = (\Gamma_{ij}^k)$ – M hamar çoxobrazlısının üzərində verilmiş afın rabitədir, $V = V^i \partial_i$ isə hər hansı vektor meydanıdır.

Teorem 4.1.

$${}^H V = ({}^H V^i, {}^H V^{i\alpha_1\alpha_2}) = (V^i, X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m V^r + X_{i_1 m}^{\alpha_1\alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m V^r) \quad (4.1)$$

obyekti (0,2) tipli $L_2^0(M)$ tenzor reperlərinin laylanması üzərində vektor qanunu ilə çevrilir.

İsbati. Əsaslandırmaq lazımdır ki, (2.2) çevrilməsi zamanı

$${}^H V^{I'} = A_{I'}^{I'} {}^H V^I \quad (4.2)$$

bərabərliyi ödənilir. İlk növbədə $I' = i'$ halını nəzərdən keçirək. Bu halda (4.1) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadəni aşağıdakı kimi çeviririk:

$$A_{i'}^{i'} {}^H V^{i'} = A_{i'}^{i'} {}^H V^i + A_{i\alpha_1\alpha_2}^{i'} {}^H V^{i\alpha_1\alpha_2} = A_{i'}^{i'} V^i = V^{i'} = {}^H V^{i'},$$

yəni (4.2) bərabərliyi ödənilir.

$I' = i'_{\alpha_1\alpha_2}$ halında (4.2) bərabərliyinin sol tərəfi bu şəkildə çevrilir:

$$\begin{aligned} {}^H V^{i'_{\alpha_1\alpha_2}} &= {}^H V^{i'_{\alpha_1\alpha_2}} = X_{m'i'_2}^{\alpha_1\alpha_2} \Gamma_{r'i'_1}^{m'} V^{r'} + X_{i'_1 m'}^{\alpha_1\alpha_2} \Gamma_{r'i'_2}^{m'} V^{r'} \\ &= X_{m'i'_2}^{\alpha_1\alpha_2} A_{m'}^{r'} A_{i'_1}^{i_1} \Gamma_{ri_1}^m V^{r'} + X_{m'i'_2}^{\alpha_1\alpha_2} A_{m'}^{r'} \partial_{r'} A_{i'_1}^m V^{r'} \\ &\quad + X_{i'_1 m'}^{\alpha_1\alpha_2} A_{m'}^{r'} A_{i'_2}^{i_2} \Gamma_{ri_2}^m V^{r'} + X_{i'_1 m'}^{\alpha_1\alpha_2} A_{m'}^{r'} \partial_{r'} A_{i'_2}^m V^{r'} = \sum_{k=1}^4 l_k, \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned} e_1 &= X_{m'i'_2}^{\alpha_1\alpha_2} A_{m'}^{r'} A_{i'_1}^{i_1} \Gamma_{ri_1}^m V^{r'}, \\ e_2 &= X_{m'i'_2}^{\alpha_1\alpha_2} A_{m'}^{r'} \partial_{r'} A_{i'_1}^m V^{r'}, \\ e_3 &= X_{i'_1 m'}^{\alpha_1\alpha_2} A_{m'}^{r'} A_{i'_2}^{i_2} \Gamma_{ri_2}^m V^{r'}, \\ e_4 &= X_{i'_1 m'}^{\alpha_1\alpha_2} A_{m'}^{r'} \partial_{r'} A_{i'_2}^m V^{r'} \end{aligned}$$

işarə olunmuşdur.

Digər tərəfdən baxılan halda (4.2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki ifadəni aşağıdakı kimi çevirmək olar:

$$\begin{aligned} A_{i'}^{i'} {}^H V^{i'} &= A_{i'}^{i'_{\alpha_1\alpha_2}} {}^H V^{i'} + A_{i\sigma_1\sigma_2}^{i'_{\alpha_1\alpha_2}} {}^H V^{i\sigma_1\sigma_2} \\ &= \partial_i (A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2}) X_{i_1 i_2}^{\alpha_1\alpha_2} V^i + A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2} \delta_{\sigma_1}^{\alpha_1} \delta_{\sigma_2}^{\alpha_2} X_{mi_2}^{\sigma_1\sigma_2} \Gamma_{ri_1}^m V^r \\ &\quad + A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2} \delta_{\sigma_1}^{\alpha_1} \delta_{\sigma_2}^{\alpha_2} X_{i_1 m}^{\sigma_1\sigma_2} \Gamma_{ri_2}^m V^r = \sum_{l=1}^4 f_l, \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned} f_1 &= X_{i_1 i_2}^{\alpha_1\alpha_2} (\partial_i A_{i'_1}^{i_1}) A_{i'_2}^{i_2} V^i, \\ f_2 &= X_{i_1 i_2}^{\alpha_1\alpha_2} A_{i'_1}^{i_1} (\partial_i A_{i'_2}^{i_2}) V^i, \\ f_3 &= X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2} \Gamma_{ri_1}^m V^r, \\ f_4 &= X_{i_1 m}^{\alpha_1\alpha_2} A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2} \Gamma_{ri_2}^m V^r. \end{aligned}$$

Müvafiq hesablamalar vasitəsilə aşağıdakı münasibətləri alırıq:

$$e_1 = f_3, e_2 = f_1, e_3 = f_4, e_4 = f_2. \quad (4.3)$$

Beləliklə, (4.3) münasibətlərindən görünür ki, (4.2) bərabərliyi $I' = i'_{\alpha_1\alpha_2}$ halında da ödənilir. Bu isə o deməkdir ki, ${}^H V$ obyekt $L_2^0(M)$ laylanması üzərində vektor meydanıdır. Bununla teoremin isbatı başa çatmış olur.

${}^H V$ vektor meydanını V vektor meydanının $L_2^0(M)$ laylanmasına horizontal lifti adlandırırıq.

Aşağıdakı teorem vektor meydanının (0,2) tipli tenzor reperlərinin $L_2^0(M)$ laylanmasına tam və horizontal liftlərinin arasındakı əlaqəni müəyyən edir.

Teorem 4.2. $V \in T_0^1(M)$ vektor meydanı üçün

$${}^C V - {}^H V = \bar{V}$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\bar{V} = (0, \bar{V}^{i\alpha_1\alpha_2})$, $\bar{V}^{i\alpha_1\alpha_2} = -X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} \hat{V}_{i_1} V^m - X_{i_1m}^{\alpha_1\alpha_2} \hat{V}_{i_2} V^m$, $\hat{V}$ isə əmsalları $\hat{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ olan afin rabitədir.

İsbati. (3.1) və (4.1) bərabərliklərindən müəyyən edirik ki, ${}^C V$ və ${}^H V$ vektor meydanları yalnız ${}^C V^{i\alpha_1\alpha_2}$ və ${}^H V^{i\alpha_1\alpha_2}$ komponentlər seriyaları ilə fərqlənilirlər.

$\bar{V} = {}^C V - {}^H V$ işarə edək. Onda

$$(\bar{V}^I) = (\bar{V}^i, \bar{V}^{i\alpha_1\alpha_2}) = (0, \bar{V}^{i\alpha_1\alpha_2}).$$

Buradan alınır ki,

$$\begin{aligned} \bar{V}^{i\alpha_1\alpha_2} &= -X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} \partial_{i_1} V^m - X_{i_1m}^{\alpha_1\alpha_2} \partial_{i_2} V^m - X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m V^r - X_{i_1m}^{\alpha_1\alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m V^r \\ &= -X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} (\partial_{i_1} V^m + \Gamma_{ri_1}^m V^r) - X_{i_1m}^{\alpha_1\alpha_2} (\partial_{i_2} V^m + \Gamma_{ri_2}^m V^r) \\ &= -X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} (\partial_{i_1} V^m + \hat{\Gamma}_{i_1r}^m V^r) - X_{i_1m}^{\alpha_1\alpha_2} (\partial_{i_2} V^m + \hat{\Gamma}_{i_2r}^m V^r) \\ &= -X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} \hat{V}_{i_1} V^m - X_{i_1m}^{\alpha_1\alpha_2} \hat{V}_{i_2} V^m, \end{aligned}$$

$\hat{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ işarə olunmuşdur. Sonuncu münasibət teoremin isbat olunduğunu göstərir.

Teorem 4.3. İxtiyari $V, W \in T_0^1(M)$ vektor meydanları üçün

$$[{}^H V, {}^H W] = {}^H [V, W] + \overline{R(V, W)}$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\overline{R(V, W)} = X - L_2^0(M)$ laylanması üzərində elə şaquli vektor meydanıdır ki,

$$X^{i\alpha_1\alpha_2} = V^I W^r (X_{mi_2}^{\alpha_1\alpha_2} R_{lri_1}^m + X_{i_1m}^{\alpha_1\alpha_2} R_{lri_2}^m)$$

burada $R_{kjl}^i = \nabla$ afin rabitəsinin ayrilik tenzorunun komponentləridir.

Aşağıdakı işarələməni daxil edək:

$$Z^i = [V, W]^i = V^m \partial_m W^i - W^m \partial_m V^i.$$

$Z = (Z^i)$ vektor meydanının $L_2^0(M)$ laylanmasına horizontal liftini təyin edək. ${}^H Z$ vektor meydanının komponentləri üçün iki hal mümkündür:

1) $I = i$, bu halda

$${}^H Z^i = {}^H [V, W]^i = [V, W]^i.$$

Digər tərəfdən,

$$\begin{aligned} [{}^H V, {}^H W]^i &= {}^H V^L \partial_L {}^H W^i - {}^H W^L \partial_L {}^H V^i = V^l \partial_l W^i - W^l \partial_l V^i = {}^H Z^i \\ &= {}^H [V, W]^i \end{aligned}$$

2) $I = i_{\alpha_1 \alpha_2}$, bu halda (4.1) bərabərliyini nəzərə almaqla yazı bilərik:

$$\begin{aligned} {}^H Z^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} &= {}^H [V, W]^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} = X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m Z^r + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m Z^r \\ &= Z^r \left(X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m \right). \end{aligned}$$

Digər tərəfdən,

$$\begin{aligned} [{}^H V, {}^H W]^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} &= {}^H V^L \partial_L {}^H W^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} - {}^H W^L \partial_L {}^H V^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} \\ &= {}^H V^l \partial_l {}^H W^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} + {}^H V^{\gamma_1 \gamma_2} \partial_{l_{\gamma_1 \gamma_2}} {}^H W^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} - {}^H W^l \partial_l {}^H V^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} \\ &\quad - {}^H W^{\gamma_1 \gamma_2} \partial_{l_{\gamma_1 \gamma_2}} {}^H V^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} \\ &= V^l \partial_l \left(X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m W^r + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m W^r \right) \\ &\quad + \left(X_{ml_2}^{\gamma_1 \gamma_2} \Gamma_{rl_1}^m V^r + X_{l_1 m}^{\gamma_1 \gamma_2} \Gamma_{rl_2}^m V^r \right) \left(\delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_q^{l_1} \delta_{i_2}^{l_2} \Gamma_{pi_1}^q W^p \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_{i_1}^{l_1} \delta_q^{l_2} \Gamma_{pi_2}^q W^p \right) - W^l \partial_l \left(X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m V^r + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m V^r \right) \\ &\quad - \left(X_{ml_2}^{\gamma_1 \gamma_2} \Gamma_{rl_1}^m W^r + X_{l_1 m}^{\gamma_1 \gamma_2} \Gamma_{rl_2}^m W^r \right) \left(\delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_q^{l_1} \delta_{i_2}^{l_2} \Gamma_{pi_1}^q V^p \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\gamma_1}^{\alpha_1} \delta_{\gamma_2}^{\alpha_2} \delta_{i_1}^{l_1} \delta_q^{l_2} \Gamma_{pi_2}^q V^p \right) \\ &= (V^l \partial_l W^r - W^l \partial_l V^r) \left(X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m \right) \\ &\quad + X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} V^l W^r \partial_l \Gamma_{ri_1}^m + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} V^l W^r \partial_l \Gamma_{ri_2}^m + X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{rq}^m V^r \Gamma_{pi_1}^q W^p \\ &\quad + X_{mq}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m V^r \Gamma_{pi_2}^q W^p + X_{qm}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m V^r \Gamma_{pi_1}^q W^p \\ &\quad + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{rq}^m V^r \Gamma_{pi_2}^q W^p - X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} W^l V^r \partial_l \Gamma_{ri_1}^m - X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} W^l V^r \partial_l \Gamma_{ri_2}^m \\ &\quad - X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{rq}^m W^r \Gamma_{pi_1}^q V^p - X_{mq}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m W^r \Gamma_{pi_2}^q V^p \\ &\quad - X_{qm}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m W^r \Gamma_{pi_1}^q V^p - X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{rq}^m W^r \Gamma_{pi_2}^q V^p \\ &= Z^r \left(X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_1}^m + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} \Gamma_{ri_2}^m \right) \\ &\quad + X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} V^l W^r (\partial_l \Gamma_{ri_1}^m - \partial_r \Gamma_{li_1}^m + \Gamma_{lq}^m \Gamma_{ri_1}^q - \Gamma_{rq}^m \Gamma_{li_1}^q) \\ &\quad + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} V^l W^r (\partial_l \Gamma_{ri_2}^m - \partial_r \Gamma_{li_2}^m + \Gamma_{lq}^m \Gamma_{ri_2}^q - \Gamma_{rq}^m \Gamma_{li_2}^q) \\ &= {}^H [V, W]^{i_{\alpha_1 \alpha_2}} + V^l W^r \left(X_{mi_2}^{\alpha_1 \alpha_2} R_{lri_1}^m + X_{i_1 m}^{\alpha_1 \alpha_2} R_{lri_2}^m \right), \end{aligned}$$

burada

$$R_{lri}^m = \partial_l \Gamma_{ri}^m - \partial_r \Gamma_{li}^m + \Gamma_{lq}^m \Gamma_{ri}^q - \Gamma_{rq}^m \Gamma_{li}^q$$

▽ afin rabitəsinin əyrilik tenzorunun komponentləridir. Teorem isbat olundu.

Qeyd etmək lazımdır ki, teorem 4.3-ün kotoxunan laylanma, reperlərin laylanması, afinor laylanması hallarındakı analoqları [5], [2], [6] işlə-

rində isbat olunmuşdur. Teorem 4.3 onu göstərir ki, vektor meydanlarının tam liftinin qurulması əmələndən fərqli olaraq, vektor meydanının horizontal liftinin qurulması əməli M hamar çoxobrazlısı və $L_2^0(M)$ laylanması üzərindəki vektor meydanlarının Li cəbrlərinin homomorfizmi deyildir.

ƏDƏBİYYAT

1. Mok K.P. Complete Lifts of Tensor Fields and Connections to the Frame Bundle // Proc. London Math. Soc., 1979, v.38, No3, p. 72-88.
2. Cordero L.A., de Leon M. Lifts of tensor fields to the Frame Bundle // Rend. Circ. Mat. / Palermo, 1983, v.32, No2, p.236-276.
3. Salimov A.A., Fattayev H.D. Coframe bundle and problems of lifts on its cross-sections // Turk J Maths., 2018, v. 42, No4, p. 2035-2044.
4. Fattayev H.D., Salimov A.A. Metrics and Connections on the Bundle of Affine Frames // Chin. Ann. Math. Ser. B, v.42, 2021, No1, p.121-134.
5. Yano K., Patterson E.M. Horizontal Lift from a Manifold to the cotangent bundle // y. Math. Soc. Japan, 1967, v.19, p. 185-198.
6. Фаттаев Г.Д. Горизонтальный Лифт Тензорных полей в Чистое Аффинное расслоение // Москва, 1992, 19с., Деп. в ВИНТИ 25.09.92, No 2892- В92.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СТРУКТУР В РАССЛОЕНИЕ ТЕНЗОРНЫХ РЕПЕРОВ ТИПА (0,2)

Г.Д.ФАТТАЕВ, Ф.Б.БАШИРЛИ

РЕЗЮМЕ

В работе определяется расслоение тензорных реперов типа (0,2), строящая полный и горизонтальный лифты векторных полей, заданных на базе расслоения, изучаются их основные свойства и соотношения между ними.

Ключевые слова: тензорный репер, аффинная связность, расслоение, горизонтальный лифт, тензор кривизны, коммутатор.

STUDY OF SOME STRUCTURES IN THE BUNDLE OF TENSOR FRAMES OF TYPE (0,2)

H.D.FATTAYEV, A.B.BASHIRLI

SUMMARY

In the paper the bundle of (0,2) type tensor frames is defined, the complete and horizontal lifts of vector fields given on the base of the bundle are constructed, its main properties and the relation between them are studied.

Keywords: tensor frame, affine connection, bundle, horizontal lift, curvature tensor, commutator.