

УДК 519.65

**О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ
ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ****М.Г.МАХМУДОВА, Г.М.МАСМАЛИЕВ*****Бакинский Государственный Университет
hacimasmaliyev@hotmail.com**

Исследуются нули линейной комбинации модифицированной функции Бесселя первого рода $I_\nu(z)$ и ее производной, рассматриваемой как функция от порядка ν . Доказано, что при фиксированном $z, z > 0$, функция $aI_\nu(z) + bI'_\nu(z)$, где $a^2 + b^2 > 0, ab \geq 0$ не имеет нулей в правой полуплоскости $\operatorname{Re} \nu \geq 0$.

Ключевые слова: функции Бесселя, нули функций Бесселя, спектральная задача, собственные значения.

Введение и основной результат

Анализ многих физических проблем требует исследования нулей конкретных трансцендентных функций. В ситуации с круговой или сферической симметрии часто используются функции Бесселя или их комбинации. Следует отметить, что вопрос о нулях функций Бесселя изучен более детально, когда они рассматриваются как функции от своих аргументов, т.е. при фиксированном порядке (см. [1]–[5] и цитированную в них литературу). С другой стороны, различные квантово-механические приложения стимулируют также интерес к корням функций Бесселя, рассматриваемых как функции от их порядка. В этом направлении отметим работы [6], [7], в которых для положительных z исследовались нули J_ν функции Бесселя первого рода $J_\nu(z)$.

Подобная задача для модифицированной функции Бесселя второго рода изучалась в работе [8] (см. также [9], [10]). Кроме того, некоторые прикладные задачи требуют изучения нулей линейных комбинаций бесселевых функций и их производных. В связи с этим отметим работу [11], которая посвящена исследованию нулей линейной комбинации функции Ганкеля и ее производной.

В работах [1],[2] показано, что модифицированная функция Бесселя второго рода $I_\nu(z)$, как функция от порядка ν , не имеет нулей в правой полуплоскости. Интерес представляет также анализ ν -нулей линейной комбинации самой функции $I_\nu(z)$ и ее производной $\frac{d}{dz}I_\nu(z)$. Однако использованная в [1],[2] методика не позволяет исследовать нулей линейной комбинации функции $I_\nu(z)$ и ее производной $\frac{d}{dz}I_\nu(z)$.

Рассмотрим модифицированное уравнение Бесселя

$$z^2 u'' + zu' - (z^2 + \nu^2)u = 0, \quad (1)$$

где ν является комплексным параметром. Хорошо известно [12], что это уравнение имеет решение $I_\nu(z)$, представимое в виде

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}, \quad (2)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – Гамма функция. Функция $I_\nu(z)$ называется модифицированной функцией Бесселя первого рода.

В настоящей работе изучен вопрос о распределении нулей функции $aI_\nu(z) + b\frac{dI_\nu(z)}{dz}$, рассматриваемой как функция от порядка ν ,

где a и b действительны и $z > 0$. Привлечение к этому вопросу некоторой спектральной задачи является особенностью данной работы. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. При каждом фиксированном $z > 0$ и для любых действительных a и b , где $a^2 + b^2 > 0, ab \geq 0$, функция $aI_\nu(z) + b\frac{dI_\nu(z)}{dz}$ не имеет нулей в правой полуплоскости $\operatorname{Re} \nu \geq 0$.

Доказательство теоремы

Рассмотрим уравнение (1). Если мы положим $z = e^{c-x}, y(x) = u(e^{c-x}), \nu = i\lambda$, где c – любое конечное число, то уравнение (1) примет вид

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, q(x) = e^{2(c-x)}. \quad (3)$$

Рассмотрим спектральную задачу, порождаемую на полуоси $0 \leq x < \infty$ дифференциальным уравнением (3) и краевым условием

$$\alpha y(0) - \beta y'(0) = 0, \quad (4)$$

где действительные числа α и β таковы, что $\alpha^2 + \beta^2 > 0, \alpha\beta \geq 0$. Из указанных выше подстановок следует, что функция

$$f(x, \lambda) = I_{-i\lambda}(e^{c-x}) \quad (5)$$

является решением уравнения (3). Известно [13], что $I_{-i\lambda}(z)$ для фиксированного $z > 0$ является целой функцией от λ . Тогда в силу (5) при каждом фиксированном $x, 0 \leq x < +\infty$, решение $f(x, \lambda)$ уравнения (3) будет целой функцией относительно λ . Из известного [12] соотношения

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Gamma^{-1}(\nu+1)(1+o(1)), z \rightarrow 0,$$

следует

$$f(x, \lambda) = 2^{i\lambda} e^{-ic\lambda} e^{i\lambda x} \Gamma^{-1}(1-i\lambda)(1+o(1)), x \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

С другой стороны, как известно [13],[14], уравнение (3) имеет единственное решение $e(x, \lambda)$ с асимптотикой $e(x, \lambda) = e^{i\lambda x}(1+o(1)), x \rightarrow +\infty$. Более того, справедливо следующее треугольное представление

$$e(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{+\infty} K(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad (7)$$

где ядро $K(x, t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и удовлетворяет соотношению

$$K(x, t) = O(e^{2c-x-t}), x+t \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

Из (5)-(8) следует, что

$$e(x, \lambda) = 2^{-i\lambda} e^{ic\lambda} \Gamma(1-i\lambda) I_{-i\lambda}(e^{c-x}). \quad (9)$$

Согласно общей теории (см. [13]) граничная задача (3)-(4) имеет непрерывный спектр, заполняющий полуось $[0, +\infty)$. Собственные значения этой задачи совпадают с квадратами нулей функции $\alpha e(0, \lambda) - \beta e'(0, \lambda)$, расположенных в верхней полуплоскости. Как известно [13], при $\lambda > 0$ функция $\alpha e(0, \lambda) - \beta e'(0, \lambda)$ не может обратиться в нуль. Далее, известно, что в общем случае, т.е. для вещественного потенциала $q(x)$ из класса $\int_0^{+\infty} x|q(x)|dx < \infty$, функция $\alpha e(0, \lambda) - \beta e'(0, \lambda)$ в полуплоскости

$\text{Im } \lambda > 0$ может иметь лишь конечное число простых нулей λ_n , лежащих на мнимой оси: $\lambda_n = i\theta_n, \theta_n > 0$. При этом числа $-\theta_n^2$ служат собственными значениями граничной задачи (3)-(4). Однако ввиду положительности потенциала $q(x) = e^{2(c-x)}$ и условия $\alpha\beta \geq 0$ оператор, порожденный в $L_2(0, \infty)$ задачей (3)-(4), является положительным. Поэтому граничная задача (3)-(4) не может иметь [15] отрицательных собственных значений. Следовательно, $\alpha e(0, \lambda) - \beta e'(0, \lambda) \neq 0$ при $\text{Im } \lambda \geq 0, \lambda \neq 0$. Далее, в граничном условии (4) величины α, β могут быть произвольными числами, удовлетворяющими условиям $\alpha^2 + \beta^2 > 0, \alpha\beta \geq 0$. Очевидно, что этим

свойством обладает и числа $a = \alpha, b = \beta e^c$. Полагая тогда $z = e^c, \nu = -i\lambda$ и учитывая, что $2^{-i\lambda} e^{ic\lambda} \Gamma(1-i\lambda) \neq 0$ при $\text{Im } \lambda \geq 0$ из (9) находим, что функция $aI_\nu(z) + bI'_\nu(z)$ не имеет нулей при $\text{Re } \nu \geq 0, \nu \neq 0$. Кроме того, из формулы (2) следует, что при фиксированном $z > 0$ функция $I'_\nu(z)$ не определена в точке $\nu = 0$. Следовательно, функция $aI_\nu(z) + bI'_\nu(z)$ не имеет нулей в замкнутой правой плоскости $\text{Re } \nu \geq 0$. Тем самым завершается доказательство теоремы.

Замечание. Так как для целых значений n имеет место [12] равенство $I_n(z) = I_{-n}(z)$, то из доказанной теоремы следует, что при условиях $a^2 + b^2 > 0, ab \geq 0$ нули функции $aI_\nu(z) + bI'_\nu(z)$ расположены в левой полуплоскости $\text{Re } \nu < 0$ с выколотыми точками $\nu = -n, n = 1, 2, \dots$. Более того, при отсутствии условия $ab \geq 0$ функция $aI_\nu(z) + bI'_\nu(z)$ может иметь в правой плоскости $\text{Re } \nu > 0$ лишь конечное число простых вещественных нулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грей Э., Мэтьюз Г.Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. – Москва: ИЛ, - 1953.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. - Москва: Наука, - т. 2, - 1974.
3. Керимов М. К., Скороходов С. Л. О вычислении комплексных нулей функций Бесселя $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ и их производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984. Т.24. №10. С.11497–1513.
4. Керимов М. К. Исследования о нулях специальных функции Бесселя и методах их вычисления. IV. Неравенства, оценки, разложения и др. для нулей функций Бесселя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т.58. №1. С. 3–41.
5. Bobkov V. Asymptotic Relation For Zeros of Cross-Product of Bessel Functions and Applications // J. Math. Analys. Appl. 2019. V.472. N1. P. 1078–1092.
6. Coulomb M. J. Sur les zéros des fonctions de Bessel considérées comme fonctions de 1 ordre // Bull. Sci. Math. 1936. V.60. P.297–302.
7. Dougall J. The determination of Green's Function by means of Cylindrical or Spherical Harmonics // Proc. Edin. Math. Soc. 1900. V.18. P. 33–83.
8. Polya .Bemerkung über die integraldarstellung der Riemannschen ξ – function // Acta Math., 1926. V. 48. P. 305–317.
9. Hejhal D.A. On a result of G.Polya concerning the Riemann ξ – function // Journal Danalyse Mathematique. 1990. V. 55. P.59–95
10. Багирова С.М., Ханмамедов А.Х. О нулях модифицированной функции Бесселя II рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т.60. № 5, с. 837–840
11. Cochran J. A. The zeros of Hankel functions as functions of their order // Numerische Mathematik. 1965. v. 7. n. 3. P. 238–250.
12. Abramowitz V., Stegun I. N. (eds.) Handbook of mathematical functions, 10th edit., Applied Mathematical series, 55, National Bureau of Standards, Washington; Dover Publications, Inc., New York, 1964 (Пер. В.А.Диткин, Л.Н.Кармазина (ред.). Спра-

- вочник по специальным функциям. -Москва: Наука, - 1979.
13. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля.- Москва: Наука, - 1984.
 14. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. Думка, - 1977.
 15. Fournais S., Helffer B. Spectral Methods in Surface Superconductivity. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol.77, Boston: Birkhauser Boston Inc., 2010.

MODİFİKASIYA OLUNMUŞ BİRİNCİ NÖV BESSEL FUNKSIYASININ VƏ ONUN TÖRƏMƏSİNİN SIFIRLARININ PAYLANMASI

M.H.MAHMUDOVA, H.M.MƏSMƏLİYEV

XÜLASƏ

Modifikasiya olunmuş birinci növ $I_\nu(z)$ Bessel funksiyasının və onun törəməsinin ν indeksindən asılı funksiya kimi sıfırlarının paylanması araşdırılmışdır. İsbat olunmuşdur ki, qeyd olunmuş $z, z > 0$ qiymətləri üçün $a^2 + b^2 > 0, ab \geq 0$ olduqda $aI_\nu(z) + bI'_\nu(z)$ funksiyasının $\operatorname{Re} \nu \geq 0$ sağ yarımmüstəvisində sıfırları yoxdur.

Açar sözlər: Bessel funksiyası, Bessel funksiyasının sıfırları, spektral məsələ, məxsusi ədədlər.

ON THE DISTRIBUTION OF ZEROS OF A MODIFIED BESSEL FUNCTION OF THE FIRST KIND AND ITS DERIVATIVE

M.G.MAKHMUDOVA, H.M.MASMALIYEV

SUMMARY

The zeros of a linear combination of a modified Bessel function of the first kind $I_\nu(z)$ and its derivative considered as a function of order ν are studied. It is proved that for a fixed $z, z > 0$, the function $aI_\nu(z) + bI'_\nu(z)$, where $a^2 + b^2 > 0, ab \geq 0$, has no zeros in the right half-plane $\operatorname{Re} \nu \geq 0$.

Keywords: Bessel functions, zeros of Bessel functions, spectral problem, eigenvalues.