

**UOT 517.977.58**

**PARABOLİK TƏNLIYIN SƏRBƏST HƏDDİNİN TAPILMASI  
HAQQINDA İNTEQRAL ŞƏRTLƏRLƏ VARIASİONAL FORMADA  
TƏRS MƏSƏLƏNİN FƏRQ APROKSİMASİYASI VƏ  
REQULYARLAŞDIRILMASI**

**Ş.İ.MƏHƏRRƏMLİ**  
*Bakı Dövlət Universiteti*  
*semedli.shehla@gmail.com*

*İşdə parabolik tənliyin sərbəst həddinin təyini haqqında integral şərtlərlə tərs məsələnin variasional qoyuluşuna baxılır. Məsələnin fərq aproksimasiyalarının vəziyyətə və funksionala görə yığılma sürəti üçün qiymətləndirmələr alınmışdır.*

**Açar sözlər:** parabolik tənlik, integral şərtlər, tərs məsələ, fərq aproksimasiyası

Xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün tərs məsələlər variasional qoyuluşda, yəni uyğun sistemlər üçün optimal idarəetmə məsələləri kimi də ifadə oluna bilər. Belə qoyuluşlarda baxılan tənliklərin axtarılan sərbəst həddi və ya əmsalları idarəedici rolunu oynayır və məqsəd funksionalı verilmiş əlavə şərtlərin əsasında tərtib olunur [1-3].

Variasional formada qoyulmuş tərs məsələlərin təqribi həlli üçün istifadə olunan effektiv üsullardan biri sonlu fərqlər üsuludur. Parabolik tənliklər üçün integral şərtlərlə optimal idarəetmə məsələlərinin, o cümlədən də variasional formada tərs məsələlərin fərq aproksimasiyalarının yığılması məsələləri az tədqiq olunmuşdur [4, 5].

İşdə parabolik tənliyin sərbəst həddinin təyini haqqında integral şərtlərlə variasional formada tərs məsələyə baxılır. Məsələnin fərq aproksimasiyalarının vəziyyətə və funksionala görə yığılma sürəti üçün qiymətləndirmələr alınmış, idarəediciyə görə zəif yığılma isbat olunmuşdur.

**1. Məsələnin qoyuluşu və onun korrektiliyi**

Parabolik tənliyin sərbəst həddinin tapılması haqqında tərs məsələnin variasional qoyuluşuna baxaq: tutaq ki,

$$J(v) = \int_0^l \int_0^T \alpha(t) u(x, t; v) dt - \beta(x) \Big| dx \quad (1)$$

funksionalını minimallaşdıran və aşağıdakı şərtləri ödəyən  $\{v = v(x), u = u(x, t) = u(x, t; v)\}$  funksiyalar cütünü tapmaq tələb olunur:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + a(x, t) u = f(x, t) + v(x) g(t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad k(l, t) \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \int_0^l H(x, t) u(x, t) dx, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

$$v = v(x) \in V = \{v = v(x) \in L_2(0, l) : \|v\|_{2, (0, l)} \leq R\}. \quad (5)$$

Burada  $l, T, R > 0$  -verilmiş ədədlər;  $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$  -düzbucaqlı;  $k(x, t), a(x, t), f(x, t), H(x, t), \alpha(t), \beta(x), \varphi(x), g(t)$  -aşağıdakı şərtləri ödəyən verilmiş ölçülən funksiyalardır:

$$0 < v \leq k(x, t) \leq \mu, \quad \left| \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} \right| \leq \mu, \quad \left| \frac{\partial k(x, t)}{\partial t} \right| \leq \mu, \quad |a(x, t)| \leq \mu, \quad |H(x, t)| \leq \mu_1,$$

$$\left| \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} \right| \leq \mu_1, \quad Q_T \text{ -də sanki hər yerdə, } v, \mu, \mu_1 = \text{const} > 0,$$

$$f(x, t) \in L_2(Q_T), \varphi(x) \in W_{2,0}^1(0, l), \alpha(t) \in W_2^1(0, T), \beta(x) \in W_2^1(0, l), g(t) \in W_2^1(0, T). \quad (6)$$

Qeyd edək ki, (1)-(5) məsələsi (2) tənliyi üçün (3)-(5) şərtlərini və əlavə

$$\int_0^T \alpha(t) u(x, t; v) dt = \beta(x), \quad x \in (0, l)$$

integral şərtini ödəyən  $\{v(x), u(x, t; v)\}$  funksiyalar cütünün tapılması haqqında tərs məsələnin variasional formada qoyuluşudur.

İşdə istifadə olunan funksional fəzalar və onların normaları üçün [6, s. 23]-də qəbul edilmiş işarələmələrdən istifadə olunur. Bundan başqa, qiymətləndirilən kəmiyyətlərdən, mümkün idarəedicilərdən və aşağıda daxil olunan şəbəkələrin addımlarından asılı olmayan müsbət sabitləri  $M$  ilə işarə edəcəyik.

Hər bir qeyd olunmuş  $v = v(x) \in V$  üçün (2)-(4) sərhəd məsələsinin  $V_2^{1,0}(Q_T)$  fəzasından olan ümumiləşmiş həlli  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T) = \{u : u \in V_2^{1,0}(Q_T), u(0, t) = 0, 0 < t \leq T\}$  sinfindən olan elə  $u = u(x, t) = u(x, t; v)$  funksiyasına deyilir ki, ixtiyari  $\eta = \eta(x, t) \in \hat{W}_2^{1,1}(Q_T) = \{\eta = \eta \in W_2^{1,1}(Q_T), \eta(0, t) = 0, 0 < t \leq T, \eta(x, T) = 0, 0 \leq x \leq l\}$  üçün aşağıdakı integral eyniliyi ödəsin:

$$\int_{Q_T} \left( -u \frac{\partial \eta}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + au \eta \right) dx dt - \int_0^T \left[ \int_0^l H(x, t) u(x, t) dx \right] \eta(l, t) dt =$$

$$= \int_0^l \varphi \eta(x, 0) dx + \int_{Q_T} (f + v g) \eta dx dt.$$

[7] işinin nəticələrindən alınır ki, hər bir qeyd olunmuş  $v = v(x) \in L_2(0, l)$  üçün (2)-(4) sərhəd məsələsinin  $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan yeganə ümumiləşmiş həlli vardır və aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\|u\|_{Q_T} \equiv \|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq M [\|\varphi\|_{2,(0,l)} + \|v\|_{2,(0,l)} \|g\|_{1,(0,T)} + \|f\|_{2,1,Q_T}]. \quad (7)$$

Bundan başqa, (2)-(4) sərhəd məsələsinin  $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan ümumiləşmiş həlləri həm də  $W_2^{1,1}(Q_T)$  fəzasına daxildir və

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right\|_{2,(0,l)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{2,Q_T} \leq M [\|\varphi\|_{2,(0,l)}^{(1)} + \|f\|_{2,Q_T} + \|v\|_{2,(0,l)} \|g\|_{2,(0,T)}] \quad (8)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Nəhayət, [8] işinin nəticələrindən alınır ki, (1)-(5) məsələsinin optimal idarəedicilər çoxluğu  $V_* = \{v_* = v_*(x) \in V : J(v_*) = J_* \equiv \inf \{J(v) : v \in V\}\}$  boş deyil,  $L_2(0, l)$ -də zəif kompakt çoxluqdur və ixtiyari minimallaşdırıcı  $\{v_n\} \subset V$  ardıcılığı  $V_*$  çoxluğuna  $L_2(0, l)$ -də zəif yığılır.

## 2. Məsələnin fərq aproksimasiyası və onun korrektiliyi

(1)-(5) məsələsinin aproksimasiyası üçün  $[0, l], [0, T]$  parçalarında və  $\bar{Q}_T$  düzbucaqlısında aşağıdakı şəbəkələri daxil edək:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_h &= \{x_i = ih \in [0, l] : i = 0, 1, \dots, N, Nh = l\}, \quad \omega_h = \bar{\omega}_h \cap (0, l), \quad \omega_h^+ = \bar{\omega}_h \cap (0, l], \\ \omega_\tau &= \{t_j = j\tau \in [0, T] : j = 1, 2, \dots, L, L\tau = T\}, \quad \omega_\tau = \omega_h \times \omega_\tau, \quad \omega_\tau^+ = \omega_h^+ \times \omega_\tau, \quad \bar{\omega}_T = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau, \\ \omega_\tau^+ &= \omega_h^+ \times \{t' = \tau, 2\tau, \dots, t\}, \quad t \in \omega_\tau. \end{aligned}$$

Tutaq ki,  $x \in \omega_h$  olduqda  $\bar{h} = \bar{h}(x) = h$  və  $\bar{h}(0) = \bar{h}(l) = 0.5h$ . Bundan başqa, aşağıdakı elementar oyuqları daxil edək:

$$\begin{aligned} e_1^*(x) &= \{\xi : x - h \leq \xi < x\}, \quad x \in \omega_h^+; \quad e_1(0) = \{\xi : 0 \leq \xi < 0.5h\}, \\ e_1(x) &= \{\xi : x - 0.5h \leq \xi < x + 0.5h\}, \quad x \in \omega_h, \quad e_1(l) = \{\xi : l - 0.5h \leq \xi \leq l\}, \\ e_2(t) &= \{\theta : t - \tau \leq \xi < t\}, \quad t \in \omega_\tau; \quad e^*(x, t) = e_1^*(x) \times e_2(t), \quad (x, t) \in \omega_\tau^+; \\ e(x, t) &= e_1(x) \times e_2(t), \quad (x, t) \in \bar{\omega}_T. \end{aligned}$$

Aşağıdakı Steklov mənadada  $S^x, S_-^x, S_-^t$  ortalaşdırma operatorlarından istifadə edəcəyik:

$$S^x u(x, t) = \frac{1}{\bar{h}(x)} \int_{e_1(x)} u(\xi, t) d\xi, \quad S_-^x u(x, t) = \frac{1}{h} \int_{e_1^+(x)} u(\xi, t) d\xi, \quad S_-^t u(x, t) = \frac{1}{\tau} \int_{e_2(t)} u(x, \theta) d\theta.$$

$S^x$  və  $S_-^t$  operatorlarının hasilini  $S^{tx}$  ilə işarə edək:  $S^{tx} = S_-^t S^x$ .

Uyğun şəbəkələrdə verilmiş funksiyalar üçün aşağıdakı skalyar hasilləri və normaları daxil edək:

$$\begin{aligned}
(y, z)_{\omega_h^+} &= \sum_{\omega_h^+} \hbar y z, \|y\|_{2, \omega_h^+} = (y, y)_{\omega_h^+}^{1/2}, (y, z)_{\omega_\tau} = \sum_{\omega_\tau} \tau y z, \|y\|_{2, \omega_\tau} = (y, y)_{\omega_\tau}^{1/2}, \\
(y, z)_{\omega_\tau^+} &= \sum_{\omega_\tau^+} \tau (y, z)_{\omega_h^+}, \|y\|_{2, \omega_\tau^+} = (y, y)_{\omega_\tau^+}^{1/2}, (y_x^-, z_x^-)_{\omega_h^+} = \sum_{\omega_h^+} \hbar y_x^- z_x^-, \|y_x^-\|_{2, \omega_h^+} = (y_x^-, y_x^-)_{\omega_h^+}^{1/2}, \\
\|y\|_{1, \omega_\tau} &= \tau \sum_{\omega_\tau} |y|, \|y\|_{2, 1, \omega_\tau^+} = \tau \sum_{\omega_\tau} \|y(x, t)\|_{2, \omega_h^+}, \\
(y_x^-, z_x^-)_{\omega_\tau^+} &= \sum_{\omega_\tau^+} \tau (y_x^-, z_x^-)_{\omega_h^+}, \|y_x^-\|_{2, \omega_\tau^+} = (y_x^-, y_x^-)_{\omega_\tau^+}^{1/2}, \\
|y|_{\omega_\tau^+} &\equiv \|y\|_{V_2^{1,0}(\omega_\tau^+)} = \max_{0 \leq t' \leq t} \|y(x, t')\|_{2, \omega_h^+} + \|y_x^-\|_{2, \omega_\tau^+}, \quad t \in \omega_\tau, \\
\theta(t, y) &\equiv |y|_{\omega_\tau^+} + \sqrt{\tau} \|y_\tau(x, t)\|_{2, \omega_\tau^+}, \quad t \in \omega_\tau.
\end{aligned}$$

(1)-(5) məsələsini aşağıdakı fərq sxemi ilə approksimasiya edək:

$$J_{h\tau}(v_h) = \sum_{x \in \omega_h^+} \hbar \left| \tau \sum_{t \in \omega_\tau} \alpha_\tau(t) y(x, t; v_h) - \beta_h(x) \right|^2 \quad (9)$$

şəbəkə funksionalını minimallaşdıran və aşağıdakı şərtləri ödəyən  $\{v_h = v_h(x), y = y(x, t) = y(x, t; v_h)\}$  şəbəkə funksiyalar cütünü tapmaq tələb olunur:

$$y_\tau - (k_{h\tau}(x - 0.5h, t) y_x^-)_x + a_{h\tau}(x, t) y = f_{h\tau}(x, t) + v_h(x) g_\tau(t), \quad (x, t) \in \omega_\tau, \quad (10)$$

$$y(x, 0) = \varphi_h(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
y(0, t) &= 0, \quad k_{h\tau}(l - 0.5h, t) y_x^-(l, t) = \sum_{x \in \omega_h^+} \hbar H_{h\tau}(x, t) y(x, t) - \\
&- 0.5h [y_\tau(l, t) + a_{h\tau}(l, t) y(l, t) - f_{h\tau}(l, t) - v_h(l) g_\tau(t)], \quad t \in \omega_\tau, \quad (12)
\end{aligned}$$

$$v_h = v_h(x) \in V_h = \{v_h = v_h(x) \in L_2(\omega_h^+): \|v_h\|_{2, \omega_h^+} \leq R\}. \quad (13)$$

Burada  $k_{h\tau}, a_{h\tau}, f_{h\tau}, H_{h\tau}, \varphi_h, \beta_h, \alpha_\tau, g_\tau$  şəbəkə funksiyaları aşağıdakı bərabərliklərlə təyin olunur:  $k_{h\tau}(x - 0.5h, t) = S^t k(x - 0.5h, t)$ ,  $a_{h\tau}(x, t) = S^{ix} a(x, t)$ ,  $f_{h\tau}(x, t) = S^{ix} f(x, t)$ ,  $H_{h\tau}(x, t) = S^x H(x, t)$ ,  $(x, t) \in \omega_\tau^+$ ,  $\varphi_h(x) = S^x \varphi(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}_h$ ,  $\beta_h(x) = S^x \beta(x)$ ,  $x \in \omega_h^+$ ,  $\alpha_\tau(t) = S^t \alpha(t)$ ,  $g_\tau(t) = S^t g(t)$ ,  $t \in \omega_\tau$ .

(10)-(12) məsələsini aşağıdakı şəkildə göstərə bilərik:

$$y_\tau = Ay + F_{h\tau}(x, t), \quad (x, t) \in \omega_\tau^+, \quad (14)$$

$$y(x, 0) = \varphi_h(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (15)$$

$$y(0, t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad (16)$$

burada

$$Ay = \begin{cases} (k_{h\tau}(x - 0.5h, t) y_x^-)_x - a_{h\tau}(x, t) y, & (x, t) \in \omega_\tau, \\ -\frac{2}{h} k_{h\tau}(l - 0.5h, t) y_x^-(l, t) - a_{h\tau}(l, t) y(l, t) + \frac{2}{h} \sum_{x \in \omega_h^+} \hbar H_{h\tau}(x, t) y(x, t), & t \in \omega_\tau, \end{cases}$$

$$F_{h\tau}(x, t) = f_{h\tau}(x, t) + v_h(x) g_\tau(t), \quad (x, t) \in \omega_\tau^+.$$

**Teorem 1.** Tutaq ki, (6) şərtləri ödənilir və

$$\tau < \tau_0 = \frac{1}{2} \left[ 2\mu + \mu_1^2 l + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{l} \right]^{-1} \left( 2 + \nu^{-1/2} \right)^{-2} \quad (17)$$

bərabərsizliyi doğrudur. Onda hər bir qeyd olunmuş  $v_h \in V_h$  üçün (10)-(12) məsələsinin yeganə həlli vardır və aşağıdakı apriori qiymətləndirmə doğrudur:

$$\begin{aligned} & \|y(x, t; v_h)\|_{V_2^{1,0}(\omega_\tau^+)} + \sqrt{\tau} \|y_i(x, t; v_h)\|_{2, \omega_\tau^+} \leq \\ & \leq M \left[ \|\varphi_h\|_{2, \omega_h^+} + 2\|f_{h\tau}\|_{2, 1, \omega_\tau^+} + 2\|v_h\|_{2, \omega_h^+} \|g_\tau\|_{1, \omega_\tau^+} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

**İsbatı.** Müəyyən  $t \in \omega_\tau$  nöqtəsini götürək. (14) tənliyinin hər iki tərəfini  $(\cdot)_{\omega_h^+}$  skalyar hasili şəklində  $\vartheta(x, t'; v_h)$  funksiyasına vuraq və alınan bərabərliyi  $t' = \tau$ -dan  $t' = t$ -yə qədər cəmləyək. Onda aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$\sum_{t'=\tau}^t (y_i(x, t'), \vartheta(x, t'))_{2, \omega_h^+} = \sum_{t'=\tau}^t (Ay(x, t'), \vartheta(x, t'))_{2, \omega_h^+} + \sum_{t'=\tau}^t (F_{h\tau}(x, t'), \vartheta(x, t'))_{2, \omega_h^+},$$

burada  $y(x, t) = y(x, t; v_h)$ . Bu bərabərlikdə  $A$  operatorunun və  $F_{h\tau}$  funksiyasının ifadələrini nəzərə alsaq, sonra  $y_{\tau} y = 0.5(y^2)_t + 0.5\vartheta_i^2(x, t) \in \omega_\tau^+$  bərabərliyini və  $x$ -ə görə hissə-hissə cəmləmə düsturunu istifadə etsək, aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|y(x, t)\|_{2, \omega_h^+}^2 + \tau \sum_{t'=\tau}^t h \sum_{x \in \omega_h^+} k_{h\tau} (x - 0.5h, t') y_x^2(x, t') + \frac{1}{2} \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|y_i(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 = \\ & = \frac{1}{2} \|y(x, 0)\|_{2, \omega_h^+}^2 - \tau \sum_{t'=\tau}^t (a_{h\tau}(x, t'), y^2(x, t'))_{2, \omega_h^+} + \tau \sum_{t'=\tau}^t (H_{h\tau}(x, t'), y(x, t'))_{2, \omega_h^+} y(l, t') + \\ & + \tau \sum_{t'=\tau}^t (v_h(x) g_\tau(t') + f_{h\tau}(x, t'), y(x, t'))_{2, \omega_h^+}. \end{aligned} \quad (19)$$

(19) bərabərliyinin sol və sağ tərəfindəki hədləri qiymətləndirərək və  $y(x, t)$ ,  $x \in \bar{\omega}_h$  şəbəkə funksiyası üçün

$$y^2(l, t) \leq \varepsilon \|y_x(x, t)\|_{2, \omega_h^+}^2 + \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \right) \|y(x, t)\|_{2, \omega_h^+}^2, \quad \varepsilon > 0 \quad (20)$$

bərabərsizliyini [9, s. 290] və  $\varepsilon$ -la Koşi bərabərsizliyini istifadə edərək alırıq:

$$\begin{aligned} & \|y(x, t)\|_{2, \omega_h^+}^2 + 2 \left( \nu - \mu_1 \sqrt{l} \frac{\varepsilon}{2\varepsilon_1} \right) \tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_x^-(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 \leq \|y(x, 0)\|_{2, \omega_h^+}^2 + 2(\mu + c) \tau \sum_{t'=\tau}^t \|y(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 + \\ & + 2\tau \sum_{t'=\tau}^t \left( \|v_h(x)\|_{2, \omega_h^+} \|g_\tau(t')\| + \|f_{h\tau}(x, t')\|_{2, \omega_h^+} \right) \times \max_{0 \leq t' \leq t} \|y(x, t')\|_{2, \omega_h^+}, \end{aligned} \quad (21)$$

burada  $c = \mu_1 \sqrt{l} \left[ \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon_1} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \right) \right]$ .

Əgər (21)-də  $\varepsilon = \nu$ ,  $\varepsilon_1 = \mu_1 \sqrt{l}$  seçsək,  $\gamma(t) = \max_{0 \leq t' \leq t} \|y(x, t')\|_{2, \omega_h^+}$  kimi işarə etsək və  $\tau \sum_{t'=\tau}^t \|y(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 \leq t\gamma^2(t)$ ,  $\|y(x, 0)\|_{2, \omega_h^+}^2 \leq \gamma(t)\|y(x, 0)\|_{2, \omega_h^+}^2$  bərabərsizliklərini

nəzərə alsaq, aşağıdakı qiymətləndirməni alırıq:

$$\begin{aligned} & \|y(x, t)\|_{2, \omega_h}^2 + \nu \tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_x(x, t')\|_{2, \omega_h}^2 + \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|y_t(x, t')\|_{2, \omega_h}^2 \leq \\ & \leq \gamma(t) \left[ \|y(x, 0)\|_{2, \omega_h}^2 + 2\|v_h(x)\|_{2, \omega_h} \tau \sum_{t'=\tau}^t |g_\tau(t')| + 2\tau \sum_{t'=\tau}^t \|f_{h\tau}(x, t')\|_{2, \omega_h}^2 \right] + c_1 t \gamma^2(t) \equiv \delta(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad (22) \end{aligned}$$

burada  $c_1 = 2\mu + \mu_1 l + \nu^{-1} + l^{-1}$ .

(22)-dən nəticə kimi aşağıdakı üç bərabərsizliyi alırıq:

$$\gamma^2(t) \leq \delta(t), \quad \tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_x(x, t')\|_{2, \omega_h}^2 \leq \nu^{-1} \delta(t), \quad \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|y_t(x, t')\|_{2, \omega_h}^2 \leq \delta(t), \quad t \in \omega_\tau.$$

Bu bərabərsizliklərin hər iki tərəfindən kvadrat kök alaraq, alınan bərabərsizlikləri toplayaq və sağ tərəfi aşağıdakı şəkildə qiymətləndirək:

$$\begin{aligned} \theta(t, y) & \equiv \max_{0 \leq t' \leq t} \|y(x, t')\|_{2, \omega_h} + \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_x(x, t')\|_{2, \omega_h}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\tau} \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|y_t(x, t')\|_{2, \omega_h}^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \leq (2 + \nu^{-1/2}) \delta^{1/2}(t) \leq (2 + \nu^{-1/2}) \sqrt{c_1 t} \theta(t, y) + (2 + \nu^{-1/2}) \theta^{1/2}(t, y) \times \\ & \times \left[ \|y(x, 0)\|_{2, \omega_h}^2 + 2\|v_h(x)\|_{2, \omega_h} \tau \sum_{t'=\tau}^t |g_\tau(t')| + 2\tau \sum_{t'=\tau}^t \|f_{h\tau}(x, t')\|_{2, \omega_h}^2 \right]^{1/2}, \quad t \in \omega_\tau. \end{aligned}$$

Onda (17) şərtini istifadə edərək  $t < 2\tau_0$  aşağıdakı qiymətləndirməni alırıq:

$$\begin{aligned} \theta(t, y) & \leq \left[ 1 - (2 + \nu^{-1/2}) \sqrt{c_1 t} \right]^{-2} (2 + \nu^{-1/2})^2 \times \\ & \times \left[ \|y(x, 0)\|_{2, \omega_h}^2 + 2\|v_h(x)\|_{2, \omega_h} \tau \sum_{t'=\tau}^t |g_\tau(t')| + 2\tau \sum_{t'=\tau}^t \|f_{h\tau}(x, t')\|_{2, \omega_h}^2 \right], \quad t \in \omega_\tau. \quad (23) \end{aligned}$$

$[0, T]$  parçasını uzunluqları  $\tau_0$ -dan böyük olmayan  $\Delta_1 = [0, \tau_0], \Delta_2 = [\tau_0, 2\tau_0], \dots, \Delta_n$  parçalarına ayıraq. Bu parçaların hər biri üçün (23) şəklində qiymətləndirmə doğrudur. Həmin qiymətləndirmələrdən və  $\|y(x, t)\|_{2, \omega_h} \leq |y|_{\omega_h}, t \in \omega_\tau$  bərabərsizliyindən istifadə edərək aşağıdakı qiymətləndirməni alırıq:

$$\theta(t, y) \leq c(t) \times \left[ \|y(x, 0)\|_{2, \omega_h}^2 + 2\|v_h(x)\|_{2, \omega_h} \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t |g_\tau(t')| \right) + 2\tau \sum_{t'=\tau}^t \|f_{h\tau}(x, t')\|_{2, \omega_h}^2 \right], \quad t \in \omega_\tau, \text{ burada}$$

$c(t)$  funksiyası  $\nu, \mu, \mu_1, l, T$  kəmiyyətləri ilə təyin olunur. Bu bərabərsizlikdə  $t = T$  seçərək (18) qiymətləndirməsini alırıq. Teorem 1 isbat olundu.

(18) qiymətləndirməsindən istifadə edərək göstərmək olar ki, hər bir qeyd olunmuş  $(h, \tau)$  üçün (10)-(12) məsələsinin  $V_{h*} = \{v_{h*} \in V_h : J_{h\tau}(v_{h*}) = J_{h\tau*} \equiv \inf \{J_{h\tau}(v_h) : v_h \in V_h\}\}$  optimal idarəedicilər çoxluğu boş deyildir.

### 3. Sonlu fərqlər üsulunun vəziyyətə görə xəta qiymətləndirməsi

Fərz edək ki, hər bir qeyd olunmuş  $v(\xi) \in V$  üçün (2)-(4) sərhəd məsələsinin  $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan ümumiləşmiş həlli  $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$  sinfinə daxildir.

Tutaq ki,  $v(\xi) \in V, v_h(x) \in V_h$ -ixtiyari idarəedicilər,  $u(\xi, \theta) = u(\xi, \theta; v)$ ,  $y(x, t) = y(x, t; v_h)$  -(2)-(4) və (10)-(12) məsələlərinin  $v(\xi)$  və  $v_h(x)$

idarəedicilərinə uyğun həlləridir.  $y(x, t; v_h)$  şəbəkə funksiyasını (2)-(4) məsələsinin həllinin

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} S^t u(x, t), & (x, t) \in \omega_T^+, \\ S^x \varphi(x), & x \in \bar{\omega}_h, t = 0, \\ 0, & x = 0, t \in \omega_\tau \end{cases} \quad (24)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan  $\bar{u}(x, t) = \bar{u}(x, t; v)$  ortalaşdırılması ilə müqayisə edəcəyik.

Tutaq ki,  $z(x, t) = z(x, t; v, v_h) = y(x, t; v_h) - \bar{u}(x, t; v)$  sonlu fərqlər üsulunun vəziyyətdə görə xətasıdır. (14)-(16) şərtlərini istifadə edərək  $z(x, t)$  funksiyası üçün aşağıdakı məsələni alırıq:

$$z_t = Az + \psi_{h\tau}(x, t), \quad (x, t) \in \omega_T^+, \quad (25)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (26)$$

$$z(0, t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad (27)$$

burada  $\psi_{h\tau}(x, t) = F_{h\tau}(x, t) + A\bar{u} - \bar{u}_t$ ,  $(x, t) \in \bar{\omega}_T$  - (14)-(16) məsələsinin aproksimasiya xətasıdır.

(2) tənliyində  $(x, t) \in \bar{\omega}_T$  düyün nöqtələrində  $S^{tx}$  ortalaşdırma operatorunu tətbiq etsək, müəyyən çevirmələrin köməyi ilə  $\psi_{h\tau}$  funksiyası üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\psi_{h\tau}(x, t) = \begin{cases} \eta_x^{(1)}(x, t) + \eta^{(2)}(x, t) + \eta_t^{(3)}(x, t) + \eta^{(4)}(x, t), & (x, t) \in \omega_\tau, \\ -\frac{2}{h} \eta^{(1)}(x, t) + \eta^{(2)}(x, t) + \eta_t^{(3)}(x, t) + \eta^{(4)}(x, t) + \frac{2}{h} \eta^{(5)}(t), & x = l, t \in \omega_\tau, \end{cases} \quad (28)$$

burada

$$\eta^{(1)}(x, t) = S_-^t(k(x - 0.5h, t))\bar{u}_x - S_-^t\left(k(x - 0.5h, t)\frac{\partial u(x - 0.5h, t)}{\partial x}\right) \quad (x, t) \in \omega_T^+, \quad (29)$$

$$\eta^{(2)}(x, t) = S^{tx}(a(x, t)u(x, t)) - S^{tx}(a(x, t))\bar{u}(x, t), \quad (x, t) \in \omega_T^+, \quad (30)$$

$$\eta^{(3)}(x, t) = S^x u(x, t) - \bar{u}(x, t), \quad (x, t) \in \omega_T^+, \quad (31)$$

$$\eta^{(4)}(x, t) = v_h(x)S_-^t g(t) - S^{tx}(v(x)g(t)), \quad (x, t) \in \omega_T^+, \quad (32)$$

$$\eta^{(5)}(t) = \sum_{x \in \omega_h} h S_-^x(H(x, t)\bar{u}(x, t)) - S_-^t\left(\int_0^l H(x, t)u(x, t)dx\right) \quad t \in \omega_\tau. \quad (33)$$

**Teorem 2.** Tutaq ki, (6), (17) şərtləri ödənilir və (2)-(4) məsələsinin  $V_2^{1,0}(Q_T)$ -dən olan ümumiləşmiş həlli  $W_{2,0}^{2,1}(Q_T)$  sinfinə daxildir. Onda (25)-(27) məsələsinin həlli üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\begin{aligned} & \|z(x, t)\|_{V_2^{1,0}(\omega_T^+)} + \sqrt{\tau} \|z_t(x, t)\|_{2, \omega_T^+} \leq \\ & \leq M \left[ \|\eta^{(1)}\|_{2, \omega_T^+} + \|\eta^{(2)}\|_{2, \omega_T^+} + \left( \sum_{t \in \omega_\tau} \|\eta^{(3)}(x, t)\|_{2, \omega_h}^2 \right)^{1/2} + \|\eta^{(4)}\|_{2, \omega_T^+} + \|\eta^{(5)}\|_{2, \omega_\tau} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

**İsbatı.**(25) tənliyinin hər iki tərəfini  $(\cdot)_{\omega_\tau}$  skalyar hasilı şəklində  $\mathbb{Z}(x, t')$  funksiyasına vuraq və alınan bərabərliyi  $t' - \varepsilon$  görə  $t' = \tau$ -dan  $t' = t$ -yə qədər cəmləyək, burada  $t \in \omega_\tau$ -müəyyən nöqtədir. Sonra (19) bərabərliyinin alınması zamanı istifadə olunan mülahizələrdən istifadə edərək aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|z(x, t)\|_{2, \omega_h^+}^2 + \tau \sum_{t'=\tau}^t h \sum_{x \in \omega_h^+} k_{h\tau} (x - 0.5h, t') z_x^2(x, t) + \frac{1}{2} \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|z_t^-(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 = \\ & = -\tau \sum_{t'=\tau}^t (a_{h\tau}(x, t'), z^2(x, t'))_{2, \omega_h^+} + \tau \sum_{t'=\tau}^t (H_{h\tau}(x, t'), z(x, t'))_{2, \omega_h^+} z(l, t') - \tau \sum_{t'=\tau}^t (\eta^{(1)}(x, t'), z_x^-(x, t'))_{2, \omega_h^+} + \\ & + \tau \sum_{t'=\tau}^t (\eta^{(2)}(x, t'), z(x, t'))_{2, \omega_h^+} - \tau \sum_{t'=0}^{t-\tau} (\eta^{(3)}(x, t'), z_t(x, t'))_{2, \omega_h^+} + (\eta^{(3)}(x, t), z(x, t))_{2, \omega_h^+} + \\ & + \tau \sum_{t'=\tau}^t (\eta^{(4)}(x, t'), z(x, t'))_{2, \omega_h^+} + \tau \sum_{t'=\tau}^t \eta^{(5)}(t') z(l, t'), \quad t \in \omega_\tau. \end{aligned} \quad (35)$$

Bu bərabərliyin sol və sağ tərəflərini qiymətləndirək. Cəm üçün Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən,  $\varepsilon$ -la Koşi bərabərsizliyindən,  $z(x, t)$  funksiyası üçün (20) bərabərsizliyindən istifadə edərək (21) qiymətləndirməsinin analoqu olan aşağıdakı bərabərsizliyi alırıq:

$$\begin{aligned} & \|z(x, t)\|_{2, \omega_h^+}^2 + 2 \left( \nu - \mu_1 \sqrt{l} \frac{\varepsilon}{2\varepsilon_1} \right) \tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_x^-(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 + \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|z_t^-(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 \leq \\ & \leq c_1 \sum_{t'=\tau}^t \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 + 2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^+} \times \\ & \times \left\{ \sqrt{T} \left[ \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(2)}(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 \right)^{1/2} + \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(4)}(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 \right)^{1/2} \right] + \|\eta^{(3)}(x, t)\|_{2, \omega_h^+} \right\} + \\ & + 2 \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(1)}(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 \right)^{1/2} \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_x^-(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 \right)^{1/2} + 2 \left( \tau \sum_{t'=0}^{t-\tau} \|\eta^{(3)}(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 \right)^{1/2} \left( \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|z_t^-(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 \right)^{1/2} + \\ & + 2 \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(5)}(t')\|^2 \right)^{1/2} \left\{ \tau \sum_{t'=\tau}^t \left[ \varepsilon \|z_x^-(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 + \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \right) \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 \right] \right\}^{1/2}, \quad t \in \omega_\tau, \end{aligned} \quad (36)$$

burada  $c_1 = 2(\mu + c)$ ,  $c = \mu_1 \sqrt{l} \left[ \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon_1} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l} \right) \right]$ .

Bu bərabərlikdə  $\varepsilon = \nu$ ,  $\varepsilon_1 = \mu_1 \sqrt{l}$  seçək və onun sağ tərəfinə daxil olan hədlər üçün

$$\begin{aligned} & \tau \sum_{t'=\tau}^t \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 \leq t \left( \max_{0 \leq t' \leq t} \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^+} \right)^2, \\ & \left\{ \tau \sum_{t'=\tau}^t \left[ \nu \|z_x^-(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 + \left( \frac{1}{\nu} + \frac{1}{l} \right) \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 \right] \right\}^{1/2} \leq \\ & \leq \sqrt{\nu} \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_x^-(x, t')\|_{2, \omega_h^+}^2 \right)^{1/2} + \sqrt{T \left( \frac{1}{\nu} + \frac{1}{l} \right) \max_{0 \leq t' \leq t} \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^+}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq c_2 \left[ \max_{0 \leq t' \leq t} \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^*} + \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_{\bar{x}}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} \right],$$

$$c_2 = \max \left( \sqrt{\nu}, \sqrt{T \left( \frac{1}{\nu} + \frac{1}{l} \right)} \right)$$

bərabərsizliklərini istifadə edək. Onda

$$\gamma(t) = \max_{0 \leq t' \leq t} \|z(x, t')\|_{2, \omega_h^*}$$

kimi işarə edərək (36)-dan aşağıdakı qiymətləndirməni alırıq:

$$\begin{aligned} & \|z(x, t)\|_{2, \omega_h^*}^2 + \nu \tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_{\bar{x}}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 + \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|z_t(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \leq c_1 t \gamma^2(t) + c_3 \gamma(t) \times \\ & \times \left\{ \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(2)}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} + \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(4)}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} + \|\eta^{(3)}(x, t)\|_{2, \omega_h^*} \right\} + \\ & + 2 \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(1)}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_{\bar{x}}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} + 2 \left( \tau \sum_{t'=0}^{t-\tau} \|\eta^{(3)}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} \left( \tau^2 \sum_{t'=\tau}^t \|z_t(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} + \\ & + 2c_2 \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|\eta^{(5)}(t')\|^2 \right)^{1/2} \left\{ \gamma(t) + \left( \tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_{\bar{x}}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} \right\} \equiv \delta(t), \quad t \in \omega_\tau, \end{aligned}$$

burada  $c_3 = \max(\sqrt{T}; 1)$ .

Bu bərabərsizlikdən nəticə kimi aşağıdakı üç bərabərsizlik alınır:

$$\gamma^2(t) \leq \delta(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad \tau \sum_{t'=\tau}^t \|z_{\bar{x}}(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \leq \nu^{-1} \delta(t), \quad t \in \omega_\tau, \quad \tau \sum_{t'=\tau}^t \tau \|z_t(x, t')\|_{2, \omega_h^*}^2 \leq \delta(t), \quad t \in \omega_\tau.$$

Bu bərabərsizliklərin hər iki tərəfindən kvadrat kök alsaq, alınan bərabərsizlikləri toplasaq və teorem 1-dəki mülahizələrdən istifadə edərək (34) qiymətləndirməsini alırıq. Teorem 2 isbat olundu.

(34) qiymətləndirməsinin sağ tərəfindəki hədlərin qiymətləndirmələri üçün aşağıdakı lemmanın hökmü doğrudur.

**Lemma 1.** Tutaq ki, (6) şərtləri ödənilir və (2)-(4) məsələsinin ümumiləşmiş həlli  $w_{2,0}^{2,1}(Q_T)$  sinfinə daxildir. Onda (29)-(33) kəmiyyətləri üçün aşağıdakı qiymətləndirmələr doğrudur:

$$\|\eta^{(1)}\|_{2, \omega_\tau^*} \leq \sqrt{2}(h + \tau) \|k\|_{\infty, Q_\tau}^{(0,1)} \sqrt{\left\| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\|_{2, Q_\tau} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right\|_{2, Q_\tau}}, \quad (37)$$

$$\|\eta^{(2)}\|_{2, \omega_\tau^*} \leq \sqrt{2} \|a\|_{\infty, Q_\tau} \left[ 3h \left\| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\|_{2, Q_\tau} + \tau \left\| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\|_{2, Q_\tau} \right], \quad (38)$$

$$\left( \sum_{\omega_\tau} \|\eta^{(3)}\|_{2, \omega_h^*}^2 \right)^{1/2} \leq M \left( \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} + \tau^{1/2} \right) \|u\|_{2, Q_\tau}^{(2,1)}, \quad (39)$$

$$\|\eta^{(4)}\|_{2, \omega_\tau^*} \leq \|v_h(x) - S^x[v(x)]\|_{2, \omega_h^*} \|g\|_{2, (0, T)}, \quad (40)$$

$$\|\eta^{(5)}\|_{2, \omega_\tau} \leq \sqrt{2l} \mu_1 \left[ h^{3/2} \left\| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\|_{2, Q_\tau} + h^{1/2} \tau \|u\|_{2, Q_\tau} \right]. \quad (41)$$

**İsbati.** (37)-(41) qiymətləndirmələrinin isbatı texniki cəhətdən mürəkkəb və böyük həcmli olduğundan yalnız (38) bərabərsizliyini isbat etməklə kifayətlənək.

(30) bərabərliyi ilə təyin olunan  $\eta^{(2)}(x, t)$  funksiyasını aşağıdakı şəkildə göstərə bilirik:

$$\eta^{(2)}(x, t) = \frac{1}{\mathcal{H}} \int_{e_2(t)} \int_{e_1(x)} a(\xi, \theta) \times \\ \times \left\{ \int_x^\xi \frac{\partial u(\xi_1, \theta)}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left[ \int_\xi^x \frac{\partial u(\xi_2, \theta)}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \int_{\theta_1}^\theta \frac{\partial u(\xi, \theta_2)}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \int_x^\xi \frac{\partial u(\xi_3, \theta_1)}{\partial \xi_3} d\xi_3 \right] d\theta_1 \right\} d\xi d\theta, (x, t) \in \omega_T^+.$$

Bu ifadəni istifadə edərək aşağıdakı bərabərsizliyi alırıq:

$$|\eta^{(2)}(x, t)| \leq \|a\|_{\infty, Q_T} \int_{e_2(t)} \int_{e_1(x)} \left[ \frac{3}{h} \left| \frac{\partial u(\xi, \theta)}{\partial \xi} \right| + \frac{1}{h} \left| \frac{\partial u(\xi, \theta)}{\partial \theta} \right| \right] d\xi d\theta, (x, t) \in \omega_T^+.$$

Bu bərabərsizlikdən (38) qiymətləndirməsi alınır.

Teorem 2 və lemma 1-dən (25)-(27) məsələsinin xəta qiymətləndirməsi üçün aşağıdakı teoremin hökmünün doğruluğu alınır.

**Teorem 3.** Tutaq ki, teorem 2-nin şərtləri ödənilir və  $v \in V$  və  $v_h \in V_h$  ixtiyari idarəedicilərdir. Onda (10)-(12) məsələsinin xəta qiymətləndirməsi üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\|y(x, t; v_h) - \bar{u}(x, t; v)\|_{V_2^{1,0}(\omega_T^+)} + \sqrt{\tau} \|y_t(x, t; v_h) - \bar{u}_t(x, t; v)\|_{2, \omega_T^+} \leq \\ \leq M \left[ h + \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} + \tau^{1/2} + \|v_h(x) - S^x v\|_{2, \omega_h^+} \right] = ME(h, \tau, v, v_h),$$

$$\text{burada } E(h, \tau, v, v_h) = h + \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} + \tau^{1/2} + \|v_h(x) - S^x v\|_{2, \omega_h^+}. \quad (42)$$

**Nəticə 1.** Tutaq ki,  $v_h(x) = S^x v(x)$ ,  $x \in \omega_h^+$ . Onda (10)-(12) fərq sxeminin həlli (2)-(4) məsələsinin həllinə  $V_2^{1,0}(\omega_T^+)$  fəzasının şəbəkə normasında  $\tau \sim h^{3/2}$  olduqda  $O(h^{3/4})$ ,  $\tau \sim h$  və ya  $\tau \sim h^2$  olduqda  $O(h^{1/2})$ ,  $\tau \sim h^2$  və ya  $\tau \sim h^{7/4}$  olduqda  $O(h^{5/4})$  sürəti ilə yığılır.

#### 4. Aproximasiyaların funksionala görə xəta qiymətləndirməsi və yığılma sürəti

**Teorem 4.** Tutaq ki, teorem 2-nin şərtləri ödənilir. Onda ixtiyari  $v \in V$  və  $v_h \in V_h$  idarəediciləri üçün (9) şəbəkə funksionalının xətası üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$|J(v) - J_{h\tau}(v_h)| \leq M[h + \tau + E(h, \tau, v, v_h)]. \quad (43)$$

Bu teoremin isbatı (1), (9) bərabərliklərindən və (42) qiymət-

ləndirməsindən istifadə etməklə aparılır.

Aşağıdakı qaydalarla təyin olunan iki  $Q_h : L_2(0, l) \rightarrow L_2(\omega_h^+)$  və  $P_h : L_2(\omega_h^+) \rightarrow L_2(0, l)$  inikaslarını daxil edək:

$$Q_h v(x) = S^x v(x), x \in \omega_h^+, \quad (44)$$

$$P_h v_h(\xi) = v_h(x), \xi \in e_1(x), x \in \omega_h^+, P_h v_h(\xi) = 0, \xi \in e_1(0). \quad (45)$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, ixtiyari  $v(\xi) \in L_2(0, l)$  və  $v_h(x) \in L_2(\omega_h^+)$  idarəediciləri üçün

$$\|Q_h v(x)\|_{2, \omega_h^+} \leq \|v(\xi)\|_{2, (0, l)}, \|P_h v_h(\xi)\|_{2, (0, l)} = \|v_h(x)\|_{2, \omega_h^+}.$$

Buradan alınır ki, ixtiyari  $v(\xi) \in V$ ,  $v_h(x) \in V_h$  üçün  $Q_h v(x) \in V_h$ ,  $P_h v_h(\xi) \in V$ .

**Lemma 2.** Tutaq ki, teorem 2-nin şərtləri ödənilir. Onda ixtiyari  $v \in V$ ,  $v_h \in V_h$  idarəediciləri üçün aşağıdakı qiymətləndirmələr doğrudur:

$$|J(v) - J_{h\tau}(Q_h v)| \leq M \left[ h + \tau^{1/2} + \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} \right], \quad (46)$$

$$|J(P_h v_h) - J_{h\tau}(v_h)| \leq M \left[ h + \tau^{1/2} + \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} \right]. \quad (47)$$

(46) və (47) qiymətləndirmələrinin doğruluğu (49), (50) bərabərliklərini nəzərə almaqla (43) bərabərsizliyindən birbaşa alınır.

**Teorem 5.** Tutaq ki, teorem 2-nin şərtləri ödənilir. Onda

$$|J_{h\tau^*} - J_*| \leq M \left[ h + \tau^{1/2} + \frac{h^{3/2}}{\tau^{1/2}} \right] \quad (48)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

**İsbatı.** Hər hansı  $v_* \in V_*$  idarəedicisini götürək. Onda aşkardır ki,  $Q_h v_* \in V_h$ . Buradan və (46)-dan alırıq ki,

$$J_{h\tau^*} \leq J_{h\tau}(Q_h v_*) \leq J(v_*) + M \left[ h + \tau^{1/2} + h^{3/2} \tau^{-1/2} \right] = J_* + M \left[ h + \tau^{1/2} + h^{3/2} \tau^{-1/2} \right]. \quad (49)$$

Hər hansı  $v_{h*} \in V_{h*}$  idarəedicisini götürək. Aşkardır ki,  $P_h v_{h*} \in V_h$ . Buradan və (47)-dən alırıq ki,

$$J_* \leq J(P_h v_{h*}) \leq J_{h\tau}(v_{h*}) + M \left[ h + \tau^{1/2} + h^{3/2} \tau^{-1/2} \right] = J_{h\tau^*} + M \left[ h + \tau^{1/2} + h^{3/2} \tau^{-1/2} \right]. \quad (50)$$

Teorem 5 isbat olundu.

**Nəticə 2.** (48) bərabərsizliyindən istifadə edərək (10)-(13) məsələlərinin funksionala görə müxtəlif yığılma sürətləri alınır. Məsələn,  $\tau \sim h^{3/2}$  olduqda  $|J_{h\tau^*} - J_*| \leq Mh^{3/4}$  qiymətləndirməsi,  $\tau \sim h$  və ya  $\tau \sim h^2$  olduqda  $|J_{h\tau^*} - J_*| \leq Mh^{1/2}$  qiymətləndirməsi və  $\tau \sim h^{5/4}$  və ya  $\tau \sim h^{7/4}$  olduqda  $|J_{h\tau^*} - J_*| \leq Mh^{5/8}$  qiymətləndirməsi doğrudur.

Aproksimasiyaların requlyarlaşdırma prosesini apararaq və alınmış

nəticələrdən istifadə edərək güclü yığılan minimallaşdırıcı ardıcılığın qurulma qaydasını göstərmək olar [11, s. 325].

#### ƏDƏBİYYAT

1. Искендеров А.Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики // ДАН СССР, - 1984, - т. 274, - №3, - с. 531-533.
2. Алифанов О.А., Артюхин Е.А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. - Москва: Наука, - 1988, - 285 с.
3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск: Сибирское Научное Издательство, - 2009, - 457 с.
4. Тагиев Р.К., Габибов В.М. Разностная аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для параболического уравнения с интегральным условием // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. - 2017, - №50, - с.30-44.
5. Тагиев Р.К., Габибов В.М. Сходимость разностных аппроксимаций и регуляризация задачи оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием // Вестник Бакинского Университета. Сер. физ.-матем. наук. - 2017, - №2, - с.27-43.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. - Москва: Наука, - 1973, - 408 с.
7. Тагиев Р.К., Магеррамлы Ш.И. О разрешимости начально-краевой задачи для одномерного линейного параболического уравнения с интегральным граничным условием // Вестник Бакинского Университета. Серия: Физико-математических наук, - 2019, - №2, - с. 17-26.
8. Tagiyev R.K., Maharramli Sh.I. Variational method of solving inverse problem for a parabolic equation with integral conditions // The 6th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications. 11-13 July, - 2018, - pp. 286-288.
9. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. -Москва: Наука, - 1976, - 325 с.
10. Лубышев Ф. В. Разностные аппроксимации и регуляризация задач оптимального управления для параболических уравнений с управлениями в коэффициентах // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., - 1995, - т.35, - №9, - с.1313-1333.
11. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. - Москва, 1981, - 400 с.

# **РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ В ВАРИАЦИОННОЙ ФОРМЕ О НАХОЖДЕНИИ СВОБОДНОГО ЧЛЕНА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

**Ш.И. МАГЕРРАМЛИ**

## **РЕЗЮМЕ**

В данной работе рассматривается вариационная постановка обратной задачи об определении свободного члена параболического уравнения с интегральными условиями. Установлены оценки скорости сходимости разностных аппроксимаций задачи по состоянию и функционалу.

**Ключевые слова:** параболическое уравнение, интегральные условия, обратная задача, разностная аппроксимация

## **DIFFERENCE APPROXIMATION AND REGULARIZATION OF THE VARIATIONAL STATEMENT OF THE INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE FREE TERM OF A PARABOLIC EQUATION WITH INTEGRAL CONDITIONS**

**Sh.I. MAHARRAMLI**

## **SUMMARY**

In this paper, we consider the variational statement of the inverse problem of determining the free term of a parabolic equation with integral conditions. We establish estimates for the rate of convergence of difference approximations of the problem with respect to the state and functional.

**Keywords:** parabolic equation, integral boundary condition, inverse problem, difference approximation