

УДК 517.956

**О ЗАДАЧАХ ТИПА КОШИ И ГУРСА НА ЛИНИЯХ
С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ И
НЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ КУСКАМИ ДЛЯ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

О.М.ГУСЕЙНОВ, Т.Д. МАМЕДОВ

Гянджинский Государственный Университет
Bsu.edu.az

В работе для весьма слабых ограничениях типа ограниченности и суммируемости на коэффициенты гиперболического уравнения третьего порядка одной задачи, типа Коши и Гурса доказано существование и единственность θ -фундаментальное решения и найдено интегральное представление решения неоднородной задачи.

Ключевые слова: гиперболического уравнения третьего порядка, θ -фундаментальное решение, пространство $W_p^{(2,1)}(G)$, задачи Коши и Гурса.

В работе для весьма слабых ограничениях типа ограниченности и суммируемости на коэффициенты гиперболического уравнения третьего порядка одной задачи, введено понятие θ -фундаментального решения, которое естественным образом, обобщает понятие функции Римана на случай гиперболических уравнений третьего порядка с негладкими коэффициентами и позволяет найти интегральное представление решения неоднородной задачи. Кроме того, найдены достаточные условия, при которых эта задача везде корректно разрешима вместе со своей сопряженной системой и существует единственное θ -фундаментальное решение.

На прямоугольной области

$$G = G_1 \times G_2, \quad G_1 = (x_0, x_1), \quad G_2 = (y_0, y_1)$$

плоскости XOY рассмотрим непрерывную линию Γ , которая расположена на $\overline{G}$, соединяет точки (x_0, y_1) и (x_1, y_0) , и удовлетворяет условиям со всеми прямыми вида

$$x = \alpha = \text{const} \quad \text{и} \quad y = \beta = \text{const} \quad (\alpha \in \overline{G_1}, \beta \in \overline{G_2})$$

линия Γ имеет единственную точку пересечения, за возможным исключением конечного числа прямых

$$x = \alpha_k, k = 1, 2, \dots, N_1, \text{ и } y = \beta_k, k = 1, 2, \dots, N_2, (\alpha_k \in \overline{G}_1, \beta_k \in \overline{G}_2),$$

которыми Γ может пересекаться вдоль некоторых отрезков. Всякую такую линию назовем монотонной линией. Будем рассматривать монотонные линии, которые могут быть определены как объединение

$$\{(x, S_\Gamma(x)) | x \in \overline{G}_1\} \cup \{(v_\Gamma(y), y) | y \in \overline{G}_2\}$$

графиков некоторой пары монотонно невозрастающих функций $y = S_\Gamma(x)$ и $x = v_\Gamma(y)$ являющихся непрерывными на $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$, за возможным исключением конечного числа точек

$$x = \alpha_k \in \overline{G}_2, k = 1, 2, \dots, N_1 \text{ и } y = \beta_k \in \overline{G}_2, k = 1, 2, \dots, N_2,$$

в из которых они могут иметь разрывы первого рода (в точках разрыва их значения считаются равными одному из пределов в этой точке справа или слева). При этом функцию $x = v_\Gamma(y)$ можно рассматривать как обобщенную обратную для функции $y = S_\Gamma(x)$ и обратно.

Такие монотонные линии, в частности, могут быть составлены как объединения конечного числа кусков прямых линии, параллельных координатным осям.

Пусть $W_p^{(2,1)}(G)$, $1 \leq p \leq \infty$ – пространство всех $u \in L_p(G)$ имеющих в смысле С.Л.Соболева обобщенные производные

$$D_x^i D_y^j u \in L_p(G), i = 0, 1, 2; j = 0, 1,$$

где $D_z = \frac{\partial}{\partial z}$. Пространство $W_p^{(2,1)}(G)$ банахово в норме

$$\|u\|_{W_p^{(2,1)}(G)} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq 2 \\ 0 \leq j \leq 1}} \|D_x^i D_y^j u\|_{L_p(G)}$$

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} (Lu)(x, y) = & D_x^2 D_y u(x, y) + a_{2,0}(x, y) D_x^2 u(x, y) + \\ & + a_{1,1}(x, y) D_x D_y u(x, y) + a_{1,0}(x, y) D_x u(x, y) + \\ & + a_{0,1}(x, y) D_y u(x, y) + a_{0,0}(x, y) u(x, y) = \varphi^0(x, y), (x, y) \in G, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varphi^0 \in L_p(G)$

Пусть $a_{i,j}(x, y)$ ($i = 0, 1, 2; j = 0, 1$) измеримы на G и

$$a_{i,0} \in L_\infty(G), a_{2,0}, a_{1,1} \in L_\infty(G), (i = 0, 1)$$

При наложенных условиях оператор L уравнения (1) действует из $W_p^{(2,1)}(G)$ в $L_p(G)$ и ограничен. Зададим для уравнения (1) на некоторой монотонной линии Γ условия

$$\begin{aligned}
(L_{2,0}u)(x) &\equiv D_x^2 u(x, y) \Big|_{y=S_\Gamma(x)} = \varphi_{2,0}(x), \quad x \in G_1 \\
(L_{1,1}u)(y) &\equiv D_x D_y u(x, y) \Big|_{x=\nu_\Gamma(y)} = \varphi_{1,1}(y), \quad y \in G_2 \\
(L_{0,1}u)(y) &\equiv D_y u(x, y) \Big|_{x=\nu_\Gamma(y)} = \varphi_{0,1}(y) \\
L_{1,0}u &\equiv D_x u(x, y) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_1}} = \varphi_{1,0}, \quad L_{0,0}u \equiv u(x, y) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_1}} = \varphi_{0,0};
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\varphi_{2,0} \in L_p(G_1)$, $\varphi_{0,1} \in L_p(G_2)$, $\varphi_{i,0} \in R$, $(i=0,1)$ заданные элементы.

Операции $L_{2,0}, L_{1,1}, L_{i,0}$ взятия следов непрерывны из $W_p^{(2,1)}(G_1)$ в $L_p(G_1), L_p(G_2), R$, соответственно. Поэтому оператор $\hat{L} = (L, L_{2,0}, L_{1,1}, L_{0,1}, L_{1,0}, L_{0,0})$ задачи (1), (2) действует из

$$W_p^{(2,1)}(G) \in E_p^{(2,1)} = L_p(G) \times L_p(G_1) \times L_p(G_2) \times L_p(G_2) \times R \times R$$

и ограничен.

Задачу (1), (2) можно написать также в виде эквивалентного операторного уравнения

$$\hat{L}u = \hat{\varphi} \tag{3}$$

где

$$\hat{\varphi} = (\varphi, \varphi_{2,0}, \varphi_{1,1}, \varphi_{0,1}, \varphi_{1,0}, \varphi_{0,0}) \in E_p^{(2,1)}.$$

Решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u \in W_p^{(2,1)}(G)$ для которой выполняются равенство (1) почти всюду на G , первое, второе и третье равенства из (2) почти всюду на G_1 и G_2 , а также четвертое и пятое равенство из (2), в обычном смысле.

Задачу (1), (2) назовем задачей Коши и Гурса. Если $\Gamma = \{(x, \nu(x)) \mid x \in \bar{G}_1\}$ то задача (1), (2) эквивалентна задаче Коши классического вида, где $\nu(x)$ - непрерывно-дифференцируемая функция на $\bar{G}_1$ $\nu'(x) < 0$, $\nu(x_0) = y_1$, $\nu(x_1) = y_0$ (в этом случае линия Γ является не характеристической).

Если

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y = S_\Gamma(x) = y_0, x \in [x_0, x_1]\} \cup \{(x, y) \mid x = \nu_\Gamma(y) = x_0, y \in [y_0, y_1]\}$$

или

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y = S_\Gamma(x) = y_1, x \in [x_0, x_1]\} \cup \{(x, y) \mid x = \nu_\Gamma(y) = x_1, y \in [y_0, y_1]\}$$

то задача (1), (2) эквивалентна задаче Гурса классического вида (в этом случае Γ является характеристической линией). В этом смысле, задача (1), (2) включает в себя как частный случай задачи Коши и Гурса.

Если задача (1), (2) для любого $\varphi \in E_p^{(2,1)}$ имеет единственное решение $u \in W_p^{(2,1)}(G)$ и при этом

$$\|u\|_{W_p^{(2,1)}(G)} \leq M \|\hat{\varphi}\|_{E_p^{(2,1)}},$$

где

$$\|\hat{\varphi}\| = \|\varphi\|_{L_p(G)} + \|\varphi_{2,0}\|_{L_p(G_1)} + \|\varphi_{1,1}\|_{L_p(G_2)} + \|\varphi_{0,1}\|_{L_p(G_2)} + |\varphi_{i,0}| + |\varphi_{0,0}|$$

M - положительное постоянное не зависящее от φ , то будем говорить, что задача (1), (2) везде корректно разрешима. Отметим, что везде корректная разрешимость задачи (1), (2) эквивалентная тому, что ее оператор L имеет ограниченный обратный L^{-1} определенный на $E_p^{(2,1)}$.

Для оператора $\hat{L}$ задачи (1), (2) найден явный вид сопряженного оператора $\hat{L}^*$. Возьмем некоторый функционал $\hat{f} \in E_p^{(2,1)}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ограниченный на $E_p^{(2,1)}$.

Тогда $\hat{f}$ имеет вид

$$\hat{f} = (f(x, y), f_{2,0}(x), f_{1,1}(y), f_{0,1}(y), f_{1,0}, f_{0,0})$$

где

$$f \in L_q(G), f_{2,0} \in L_q(G_1), f_{1,1} \in L_q(G_2), f_{0,1} \in L_p(G_2), f_{1,0} \in R, f_{0,0} \in R$$

и по определению имеет место

$$\begin{aligned} \hat{f}(\hat{L}u) = & \iint_G (Lu)(x, y) f(x, y) dx dy + \int_{G_2} D_x^2 u(x, S_r(x)) f_{2,1}(x) dx + \\ & + \int_{G_2} D_x D_y u(v_r(y), y) f_{1,1}(y) dy + \int_{G_2} D_y u(v_r(y), y) f_{0,1}(y) dy + \\ & + D_x u(x_0, y_1) f_{1,0} + u(x_0, y_1) f_{0,0} \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая здесь выражение оператора L из (1) приведем правую часть равенство (4) к виду

$$\begin{aligned} \hat{f}(\hat{L}u) = & \iint_G (V\hat{f}) D_x^2 D_y u(x, y) dx dy + \int_{G_1} (V_{2,0} \hat{f}) D_x^2 u(x, y_1) dy_1 + \\ & + \int_{G_2} (V_{1,1} \hat{f}) (x_1, y) D_x D_y u(x_1, y) dy + \int_{G_2} (V_{0,1} \hat{f}) D_y u(x_1, y) dy + \\ & + (V_{1,0} \hat{f}) D_x u(x_1, y_1) + (V_{0,0} \hat{f}) u(x_1, y_1) \end{aligned}$$

В работе доказана следующая

Теорема. Задача (1), (2) имеет единственно θ фундаментальным решение $E_p^{(2,1)}(G)$.

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) = & (f(\tau, \xi; x, y), f_{2,0}(\tau; x, y), \\ & f_{1,1}(\xi; x, y), f_{0,1}(\xi; x, y), f_{1,0}(x, y), f_{0,0}(x, y)) \end{aligned}$$

из E_q и при этом решение $u \in W_p^{(1,1)}(G)$ задачи (1), (2) представляется в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \iint_G f(\tau, \xi; x, y) \varphi(\tau, \xi) d\tau d\xi + \\ & + \int_{G_1} f_{2,0}(\tau; x, y) \varphi_{2,0}(\tau) d\tau + \int_{G_1} f_{1,1}(\xi; x, y) \varphi_{1,1}(\xi) d\xi + \\ & + \int_{G_2} f_{0,1}(\xi; x, y) \varphi_{0,1}(x, y) d\xi + f_{1,0}(x, y) \varphi_{1,0} + f_{0,0}(x, y) \varphi_{0,0} \end{aligned}$$

LİTERATURA

1. Ахиев С.С. ДАН СССР, - 1980, - т.251, - №5, - с.1037-1040
2. Ахиев С.С., Гусейнов О.М. Вестник Бакинского Университета. Изд. Бак.Универс., - 1992, - №1, - с.152-155
3. Huseynov O., İsmayılov N., Mamedov R., Kubishev İ., Gasimova A. THERMAN 2015 and 4nd Rostocker İnternfsional symposium. 2015. - Baku, Azerbaijan. - Pp. 77-78

ÜÇÜNCÜ TƏRTİB HİPERBOLİK TİP TƏNLİKLƏR ÜÇÜN XARAKTERİSTİK VƏ XARAKTERİSTİK OLMAYAN XƏTT HİSSƏLƏRİ ÜZƏRİNDƏ KOŞI VƏ QURSA TIPLI MƏSƏLƏLƏR

O.M.HÜSEYNOV, T.C.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Məqalədə ölçülən məhdud əmsallara malik üçüncü tərtib hiperbolik tənliklər üçün Koşi və Qursa tipli məsələlər üçün θ - fundamental həllin varlığı və yeganəliyi isbat edilmiş və onun köməyi ilə həllin integral təsviri tapılmışdır.

Acar sözlər: Üçüncü tərtib hiperbolik tip tənliklər, θ - fundamental həll, $W_p^{(2,1)}(G)$ fəzaları, Koşi və Qursa tipli məsələlər.

FUNDAMENTAL SOLUTION OF COUCHY AND GURSA PROBLEMS FOR THE HIPERBOLIC EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

O.M.HUSEYNOV, T.C.MAMMADOV

SUMMARY

In the paper it is proved existence and uniqueness of the θ - fundamental solution of Cauchy and Gursa problems with measurable and bounded coefficients for one type of hyperbolic equation of third order and found an integral representation of the solution for the considered equation, by using of them.

Key words: hyperbolic equation of third order, θ -fundamental solution, $W_p^{(2,1)}(G)$ spaces, Cauchy and Gursa problems