MƏKTƏBDƏ FUNKSİYANIN ARAŞDIRILMASINA İKİ MÜXTƏLİF YANAŞMANIN OXŞAR VƏ FƏRQLİ CƏHƏTLƏRİ HAQQINDA

Gülnar Mustafayeva,
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
E-mail:gulnar.mustafayeva9494@gmail.com

Rəyçilər: *ped.ü.e.d., prof.* A.S. Adıgözəlov,
r.ü.fəl.dok., dos. A.Ə. Sadixov

Açar sözlər: *funksiya, törəmə, kəsilməzlik, analiz, dəyişmə oblastı, lokal ekstremum, təyin oblastı, limit*
Ключевые слова: *функция, производное, непрерывность, анализ, область преобразований, локальный экстремум, область определения, лимит*
Key words: *function, derivative, continuity, analysis, definition area, local extremity, prices area, limit*

Məktəbdə funksiyanın öyrənilməsi VII sinfin cəbr kursunda başlanır və X sinifdə törəmənin öyrənilməsinə qədər davam edir. Funksiyanın elementar üsullarla araşdırılması bu və ya digər şəkildə cəbr kursunda öyrənilir. Cəbr kursunda funksional təsəvvürlər ehtiyatı toplandıqdan sonra cəbr və analizin başlanğıcı kursunda törəmənin köməyi ilə funksiyanın araşdırılmasına başlanır. Lakin şagirdlər törəməni funksiyanın araşdırılması aparatı kimi mənimsədikdən sonra böyük ümumilik əldə edirlər. Bundan sonra funksiyanın araşdırılmasına və qrafiklərin qurulmasına törəmə geniş miqyasda cəlb edilir.

Təəssüflə qeyd etmək lazımdır ki, indiyə qədər funksiyanın araşdırılmasının bu iki üsulu bir–biri ilə əlaqəli şəkildə deyil, az qala bir-birini inkar edən üsullar kimi öyrənilir.

Cəbr dərslərində funksiyalar yalnız elementar üsullarla, cəbr və analizin başlanğıcı dərslərində isə yalnız törəmənin köməyi ilə araşdırılır. Sonralar onların əlaqələndirilməsinə və vahid riyazi üsul kimi formalaşdırılmasına ehtiyac vardır.

Biz burada funksiyanın araşdırılmasının bu üsulları arasında sıx əlaqə yaradılmasının mümkün yollarından birini göstərmək istəyirik.

Tənliklərin və bərabərsizliklərin həlli, eyniliklər və eynilik bərabərsizliklərin isbatı funksiyanın araşdırılmasının elementar vasitələridir. Bu vasitələrin köməyi ilə adətən aşağıdakı ənənəvi sxem üzrə elementar funksiyaları araşdırmaq mümkün olur: a) təyin oblastları; b) dəyişmə oblastları; c) funksiyanın sıfırları (kökləri); ç) işarə sabitliyi aralıqları; d) monotonluğu; e) qabarıqlığın istiqaməti; j) cütlüyün (təkliyin) araşdırılması; i) dövrülük; z) asimptotların tapılması.

Bu anlayışlar müəllimlərin tədris praktikasında normal şəkildə daxil edilir və şagirdlər tərəfindən də müvəffəqiyyətlə mənimsənilir.

Elementar üsullar bütün bəndlər üzrə (bucaq əmələ gətirən nöqtələrdə və kəsilməzlik haqqındakı məsələlərdən başqa) ən sadə funksiyaları araşdırmağa imkan verir. Lakin bəzi hallarda bu böyük çevirmələrlə əlaqədar olur, ona görə də bəzi bəndlər üzrə bir sıra funksiyaların (məsələn, istənilən rasional dərəcədən qüvvət funksiyasının qabarıqlığının araşdırılması) elementar araşdırılmasından imtina etməyə məcbur oluruq. Araşdırılan funksiya bir qədər mürəkkəb olduqda onun elementar vasitələrlə tədqiqi mümkün olmur. Funksiyanın dəyişmə oblastı, monotonluğu və qabarıqlığının tədqiqi ilə əlaqədar çətinliklər meydana çıxır. Məhz burada riyazi analiz bizim köməyimizə gəlir. Riyazi analiz funksiyanın kəsilməzliyi haqqında məsələnin və qrafikin bucaq əmələ gətirən iti uclu nöqtələrdə araşdırılması üçün vasitə verir. Bu zaman riyazi analizin (limit və törəmə kimi) iki əsas anlayışından istifadə olunur.

Funksiyanın araşdırılmasına riyazi analizin anlayışlarını cəlb edərək istifadə etdiyimiz əsas təriflər və teoremləri nəzərdən keçirək.

1. Funksiyanın kəsilməzliyinə aşağıdakı kimi tərif verilir:

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ olduqda $y = f(x)$ funksiyasına a nöqtəsində kəsilməz funksiya deyilir.

Bu tərifin daxil edilməsi funksiyanın araşdırılması sxeminə mühüm bir bəndin (kəsilməzliyə araşdırmanın) əlavə edilməsinə imkan verir. Onu funksiyanın təyin oblastının tapılmasından dərhal sonra aparmaq münasibdir. Bu zaman funksiyanın dəyişmə oblastının tədqiqi sadələşir.

Doğrudan da, Bolsano – Koşi teoreminə görə [a, b] parçasında kəsilməyən və onun üç nöqtələrində f (a) və f (b) qiymətlər alan funksiya parçasının daxilində bir y_0 qiyməti alır ki, $f(a) < y_0 < f(a)$($f(b) < y_0 < f(a)$) olur.

Y = a ^{x} funksiyasının dəyişmə oblastını məhz bu üsulla araşdırmaq münasibdir. Əgər sadə funksiyanın kəsilməzliyi onun tərifinə əsasən tədqiq edilirsə, mürəkkəb funksiyaları kəsilməz funksiyaların cəmi və hasili haqqındakı teoremlərə əsasən araşdırmaq olar :

Əgər $f(x)$ və φ (x) funksiyaları $[a,b]$parçasında kəsilməzdirsə, onda $f(x)+$ φ (x) və $f(x)$φ(x) funksiyaları da $[a,b]$parçasında kəsilməzdir. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$parçasında kəsilməzdirsə və φ (x) funksiyası $[f(x), f(b)]$parçasında kəsilməzdirsə, onda f (φ(x)) funksiyası $[a,b]$parçasında kəsilməzdir. $f(x)$funksiyasının tərs funksiyası $[a,b]$parçasında kəsilməzdirsə, onda o, $[f(x), f(b)]$parçasında (və ya $[f(b), f(a)]$parçasında) kəsilməzdir.

Kəsilməz funksiyanın dəyişmə oblastını araşdırmaq üçün onun lokal ekstremumlarını tapmaq və təyin oblastının sərhədlərinə onun özünü necə aparmasını araşdırmaq kifayətdir. Sonra isə hər iş Bolsano–Koşi teoreminə əsaslanaraq aparılır. Əvvəlcə funksiyanın lokal ekstremumunun tərifini verək.

Əgər x_0 nöqtəsi $f(x)$funksiyasının kəsilməzlik oblastına daxildirsə və əgər bu nöqtənin elə ətrafı varsa ki, f (x_0) ≥ f (x)(f (x_0)) ≤ f (x)) (burada x həmin aralığın istənilən nöqtəsidir) olsun, onda x_0 nöqtəsində bu funksiyanın lokal maksimumu (minimumu) və ya ekstremal nöqtəsi deyilir. Riyazi analiz kursunda ekstremumun varlığının zəruri şərti isbat edilir :

Əgər funksiya x_0 nöqtəsində diferensiallanandırsa və bu ekstremal nöqtədirsə, onda funksiyanın bu nöqtədə törəməsi sıfıra bərabərdir.

Aydındır ki, ekstremal nöqtə funksiyanın diferensiallanma oblastına daxil olmaya bilər.

Göstərilən şərt yalnız zəruridir, lakin kafi deyildir. Ona görə törəmənin sıfra bərabər olduğu (və ya törəmənin olmadığı nöqtələrlə birlikdə) nöqtələrdə ekstremumun varlığının kafi şərtini nəzərə almaqla tədqiq olunmalıdır: ikinci tərtib törəmənin işarəsini dəyişdiyi və ya verilmiş nöqtədə sıfırdan fərqli ikinci tərtib törəmə (törəmənin olmadığı nöqtələr üçün yalnız birinci yol əlverişlidir)

Aydındır ki, funksiyanın dəyişmə oblastının araşdırılması üçün, ümumiyyətlə desək, onun ekstremumlarının hesablanması kafi deyildir. Bunun üçün funksiyanın təyin oblastının sərhəd nöqtələrində özünü aparmasını da aydınlaşdırmaq lazımdır. Məsələn, funksiyanın bütün ədəd oxunda təyin olunduğu halda

$\lim_{x\to\infty} f(x)$ və $\lim_{x\to\infty} f(x)$

limitlərini nəzərdən keçirmək lazımdır.

Tutaq ki, məsələn, y = $f(x)$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuş, M nöqtəsində aldığı ən böyük lokal maksimum a, M nöqtəsində aldığı ən kiçik lokal minimumu b-dir və $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$ limitləri bərabərdir. Onda funksiyanın dəyişmə oblastı [b; ∞) yarımintervalı olacaqdır.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ olduqda dəyişmə oblastı [- ∞ ; a) yarımintervalı olar.

Sonlu sayda kəsilmə nöqtələri və lokal ekstremumları olan hissəli kəsilməz funksiyaların (və ya sonlu sayda kəsilmə nöqtələri və uzunluğu onun perioduna bərabər parçada lokal ekstremumları olan periodik funksiyalar üçün) digər halları üçün də bu məsələ belə sadə həll olunur.

Bu nəticələrin doğruluğu Bolsano – Koşi teoreminə əsaslanır. Göstərilən hallardan birincisini nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, funksiya həqiqi ədədlər çoxluğunda kəsilməyəndir və sonlu sayda lokal ekstremumları vardır. Onların ən kiçiyi b = $f(m)$ olsun. Daha sonra $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ = $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ olsun.

Əvvəlcə isbat edək ki, b – dən böyük olan hər bir B ədədi bu funksiyanın dəyişmə oblastına daxildir. Sonsuz limitin tərifinə görə kifayət qədər böyük x = x * üçün f (x *) > B olur [m; x *] parçasını nəzərdən keçirək. Bolsano–Koşi teoreminə görə bu aralıqda arqumentin elə qiyməti tapılır ki, funksiyanın qiyməti B-yə bərabər olur.

İndi isbat edək ki, funksiyanın hər bir qiyməti [b; ∞) yarımintervalında yerləşir. Bunun üçün arqumentin ixtiyari $x_o \in [c,d]$ həm də $f(c)>$ b = $f(m)$və $f(d)>$ b = $f(m)$olan $[c,d]$ parçasını nəzərdən keçirək.

Bu parçada Veyerştrasın ikinci teoreminə görə funksiya həm böyük, həm də ən kiçik qiymət alır. Ən kiçik qiyməti o, parçanın c və d uc nöqtələrində və ya daxili nöqtədə ala bilər. Lakin $f(c)>$ b və $(d)>$ b olduğundan funksiyanın ən kiçik qiyməti parçanın daxilində yerləşir. Aydındır ki, bu lokal minimumlardan biridir. Buradan isə dərhal alınır ki, bu ən kiçik qiymət b–dir. Ona görə f (x_o) > b alırıq.

Misal. Y = $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ funksiyasının dəyişmə oblastını tapın.

a) Elementar araşdırma. X – i y ilə ifadə edək :

x^2 y + xy + y = x^2 - x + 1 ; (y – 1) x^2 + (y + 1) x + y – 1 = 0

Əgər y = 1 olarsa, x = 0 olar; başqa halda x - ə nəzərən kvadrat tənlik alırıq.

X = $\frac{-(y+1)\pm\sqrt{(y+1)}}{2(y-1)} = \frac{-(y+1)\pm\sqrt{-3y^2+10y-3}}{2(y-1)}$

Kvadrat tənliyin həllinin olması üçün: $-3y^2 + 10y - 3 \geq 0$ olmalıdır. Onu həll edərək $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$ alırıq.

b) Törəmənin köməyi ilə araşdırma.

Y ’ = $\frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$ = 0 olduqda x = 1 və x = -1 alırıq.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} = 1$

y(- 1) = 3 ; y (1) = $\frac{1}{3}$ olduğundan funksiyanın dəyişmə oblastı [$\frac{1}{3}$; 3] olur.

Məqalənin aktuallığı: Məktəb riyaziyyat kursunda funksiyanın araşdırılmasına iki müxtəlif yanaşma mövcuddur. Sonradan bu iki yanaşma arasında əlaqənin yaradılmasına və vahid riyazi üsulun formalaşmasına böyük ehtiyac var.

Məqalənin elmi yeniliyi: Məqalədə bu iki yanaşmanın arasında sıx əlaqənin yaradılmasının mümkün yollarından biri araşdırılmışdır.

Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi: Məqalədən müəllimlər, şagirdlər, tələbələr və magistrantlar istifadə edə bilər.

ƏDƏBİYYAT

1. Nəsibov M.X. Məktəb kursunda riyazi analizin elementləri. Bakı: Maarif, 1991.
2. Kolmoqorovun A. N. Redaktəsi ilə Cəbr və analizin başlanğıcı. Bakı: Maarif, 1992.
3. Yaqubov M. H., Nəcəfov M. A. Ekstremum məsələləri. Bakı, 2016.
4. Tahirov B.Ö., Namazov F.M., Əfəndi S.N., Qasımov E.A., Abdullayeva Q.Z. Riyaziyyatın tədrisi üsulları. Bakı, 2007.

Г. Мустафаева

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ДВУМЯ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ НА ШКОЛЬНОМ КУРСЕ И ИХ ПОХОЖИЕ И ОТЛИЧИТЕЛЬНЫЕ ЧЕРТЫ

РЕЗЮМЕ

В статье рассматриваются функции, при исследовании которых устанавливается связь между существующими двумя аргументами и проблемы единичной математической формулировки.

G. Mustafayeva

ABOUT SIMILAR AND DISTINCTIVE FEATURES OF TWO DIFFERENT APPROACHES TO STUDING THE FUNCTION AT SCHOOL

SUMMARY

The article investigates the problem of the connection between the existing two approaches and the formation of a unit mathematical method.

Redaksiyaya daxil olub: 14.11.2017