FIRLANMA SƏTHİ SAHƏSİNİN TAPILMASINA MÜƏYYƏN İNTEQRALIN BƏZİ TƏTBİQLƏRİ HAQQINDA

Azadxan Adıgözəlov,
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin professoru

Nərmin Tağıyeva,
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
E-mail: narmin.va@bk.ru

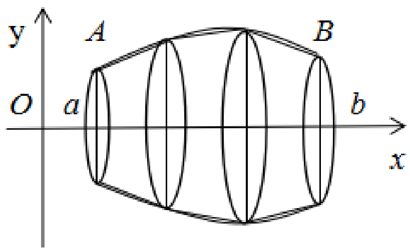
Rəyçilər: *r.ü.elm.dok., prof.* İ.C. Mərdanov
f.r.ü.fəls.dok., dos. A.Q. Cəfərov

Açar sözlər: *sahə, səth, qövs, müəyyən inteqral, firlanma, funksiya*
Ключеные слова: *площадь, поверхнось, дуга, определенный интеграл, вращение, функция*
Key words: *sphere, surface, arch, certain integral, rotation, function*

Silindrin və konusun yan səthinin sahəsi onların müvafiq açılışındakı fiqurların sahələri cəmi ilə müəyyən olunur. Lakin bu üsul istənilən səth üçün uyğun deyil. Məsələn, sferanı müstəvidə açmaq mümkün deyil.

Fırlanma səthinin sahəsini ümumi hal üçün yazaq və onun hesablanması üçün düstur verək.

Tutaq ki, tənliyi *y=f(x), x∊[a;b]*, olan əyrinin *AB* qövsü verilmişdir, burada *f(x)* kəsilməz törəməsi olan mənfi olmayan funksiyadır (şəkil1).



Şəkil 1.

[*a*;*b*] parçasını $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, *i=1,2,...,n-1* nöqtələri ilə uzunluqları bərabər olan *n* sayda parçalara bölək. x_i nöqtələrindən Oy oxuna paralel düz xətlər keçirək , bu düz xətlərin *AB* qövsü ilə kəsişmə nöqtələrini M_i ilə işarə edək.

$AM_1M_2...M_{n-1}B$ sınıq xəttinə *AB* qövsünün daxilinə çəkilmiş sınıq xətt deyilir.

[*a*;*b*] parçasını kifayət qədər kiçik hissələrə böldükdə, yəni *n* kifatət qədər böyük olduqda *AB* qövsünün və onun daxilinə çəkilmiş sınıq xəttin Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthlərin sahələri bir-birindən az fərqlənəcəkdir.

Sınıq xəttin fırlanmasından alınan səth n sayda kəsik konusun (yaxud silindrin) yan səthlərinin cəmindən ibarətdir. Onun sahəsinin hesablanması isə məlumdur.

AB qövsünün daxilinə çəkilmiş $AM_1...M_{n-1}B$ sınıq xəttinin fırlanmasından alınan səthin sahəsini $n \to \infty$ şərtində yaxınlaşdığı limitə *AB* qövsünün fırlanmasından alınan səthin sahəsi deyilir.

İsbat etmək olar ki, *AB* əyrisinin *Ox* oxu ətrafında fırlanmasından əmələ gələn səthin sahəsi

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

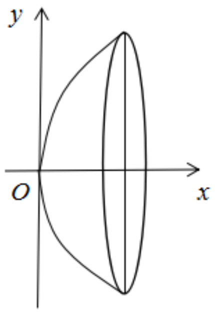
yaxud daha qısa yazsaq,

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \quad (1)$$

düsturu ilə hesablanır.

Dediklərimizi aşağıdakı məsələlərə tətbiq edək.

Məsələ 1. $y = 2\sqrt{x}$, 0 ≤ x ≤ 1 parabola qövsünün (şəkil 2) Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini hesablayın.



Şəkil 2.

Həll: $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ və a=0, b=1 olduğundan (1) düsturuna əsasən fırlanma səthinin sahəsi

$$S = 2\pi \int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+x}dx,$$

düsturu ilə ifadə olunacaqdır, buradan aşağıdakı alınır :

$$S = 4\pi \cdot \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1).$$

Beləliklə, parabola qövsünün Ox oxu ətrafinda fırlanmasından alınan səthin sahəsinin $\frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$ olduğunu alırıq.

AB əyrisi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$ (burada $\varphi(t)$ və $\psi(t)$ kəsilməyən törəmələri var) parametrik tənlikləri ilə verilərsə, onda

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |\psi(t)|\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt,$$

və yaxud daha qısa yazsaq,

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y|\sqrt{x'^2 + y'^2}dt \quad (2)$$

alarıq.

Məsələ 2. Tsikloid qövsünün Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini tapın

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases} \quad t \in [0;2\pi].$$

Həll: x'=a(1-cost) və y'=asint olduğundan (2) düsturuna əsasən

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt$$

alınır. Əvəzləmə aparsaq: $u = \cos\frac{t}{2}$, $du = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt$. Onda

$$S = 16\pi a^2 \int_{-1}^1 (1-u^2)du = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

Beləliklə, tsikloid qövsünün Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi $\frac{64}{3}\pi a^2$ - ya bərabər olar.

Məsələ 3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \geq b)$ ellipsinin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini hesablayın.

Həll: Ellipsin tənliyindən alarıq ki,

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2;\ y\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}x;$$

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{y^2 + \left(y\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{b^4}{a^4}x^2} =$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2};$$

burada $\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$.

Beləliklə, aldığımız ifadəni (1) düsturunda nəzərə alsaq,

$$S = 2\pi \int_{-a}^a y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = 2\pi\frac{b}{a}\int_{-a}^a \sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}dx = 4\pi\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}dx =$$

$$= 4\pi\frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2} + \frac{a^2}{2\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right)\Bigg|_0^a = 2\pi\frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2} + a^2\arcsin\varepsilon\right)$$

Deməli, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \geq b)$ ellipsinin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi

$$S = 2\pi\frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2} + a^2\arcsin\varepsilon\right)$$

Düsturu ilə hesablanacaqdır. Əgər burada *a*=*b*=*R* olarsa, onda sonuncu bərabərlikdən

$$S = 2\pi\int_{-R}^R Rdx = 4\pi\int_0^R Rdx = 4\pi Rx\Big|_0^R = 4\pi R^2$$

alarıq, yəni ellips R radiuslu çevrə isə, onda bu çevrənin absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan R radiuslu sferanın səthinin sahəsi $S = 4\pi R^2$ -a bərabərdir.

Məsələ 4. Tutaq ki, *l* əyrisi *y = sin x* funksiyasının *x* ∊[0,π] parçasında qrafikidir. Bu əyrinin Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsini hesablayın.

Həll: Məsələnin şərtinə görə a = 0, b = π , y = sin$x$, y' = cos$x$ olduğu üçün (1) düsturuna əsasən, axtarılan səthin sahəsi

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx$$

olur.

Buradan alırıq ki,

$$S = 2\pi\int_o^{\pi} \sqrt{1+(-\cos x)^2}d(-\cos x) = 2\pi\int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}dt =$$

$$= 4\pi\int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt$$

(2)

Sonuncu ifadədən isə

$$\int \sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2}) + c$$

(3)

Bərabərliyi doğrudur ,burada c- ixtiyari sabitdir. (3) bərabərliyini (2) də nəzərə alsaq,

$$S = 4\pi\left[\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2}\right]\Bigg|_0^1 = 2\pi\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right]$$

olar, yəni l əyrisinin Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan səthin sahəsi $2\pi\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right]$-ə bərabərdir.

Məqalənin aktuallığı. Ümumi təhsil məktəblərində bəzi fırlanma fiqurlarının səthinin açılışını taparaq onun sahəsini müstəvi fiqurunun sahəsi kimi hesablamaq olar. Lakin bir sıra fırlanma fiqurlarını müstəvidə açmaq mümkün deyil. Ona görə belə hesablamaları yerinə yetirmək üçün riyaziyyatın güclü aparatı olan inteqral hesabının tətbiqi əlverişlidir.

Məqalənin elmi yeniliyi. Məqalədə müstəvidə açıla bilməyən fırlanma səthi sahəsinin hesablanmasına inteqral hesabının tətbiqi işlənilmişdir.

Məqalənin praktiki əhəmiyyəti və tətbiqi. Fırlanma səthinin sahəsinin hesablanmasına inteqral hesabının tətbiqi bir sıra məsələləri daha əlverişli üsulla hesablamağa imkan verir.

ƏDƏBİYYAT

1. Tahirov B.Ö, Namazov F.M, Əfəndi S.N, Qasımov E.A, Abdullayeva Q.Z. Riyaziyyatın tədrisi üsulları. Bakı, 2008.
2. Yakovlevin G.H. Həndəsə, Bakı: Maarif, 1983.
3. Demidoviç B.P. Riyazi analiz məsələ və misallar, Bakı, 2009.
4. Cəbrayılov M.S., Əliyev B.Ə. "Riyazi analiz", Bakı: Çaşıoğlu, 2006.
5. Канин Е.С., Канина Е.М., Чернявский М.Д. Упражнения по началам математического анализа в 9-10 классах, Москва, 1986.

Н. Тагиева

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МЕТОДАХ ПРИ НАХОЖДЕНИИ ПЛОЩАДЕЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

РЕЗЮМЕ

В статье повествуется о прикладной интегрального исчисления при нахождении площади предмета вращающихся поверхностей. А также и даны примеры с решениями задач.

N. Taghiyeva

ABOUT SOME APPLICATION OF CERTAIN INTEGRATION TO FIND THE ROTATION SURFACE AREA

SUMMARY

The article describes the application of an inteqrated calculation of the surface area of the objects not opened in the rotation surface the application has been developed and examples of problem solving are shown.

Redaksiyaya daxil olub: 07.11.2017