# EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNDƏ HADİSƏLƏR VƏ EHTİMALLARIN HESABLANMASININ KOMBİNATOR ÜSULU

**Mehriban Gözəlova,**
**Ulduzə Musayeva,**
*Sumqayıt Dövlət Universiteti nəzdində*
*Sumqayıt Dövlət Texniki Kollecinin müəllimləri*
E-mail: af_64@mail.ru

**Rəyçilər:** *dos.* X.N. Alıyev,
*dos.* M.N. Sadiqov

***Açar sözlər:*** *ehtimal nəzəriyyəsi, hadisə, ehtimalın klassik tərifi, ehtimalın statistik tərifi, kombinator üsulu*
***Ключевые слова:*** *теория вероятностей, событие, классическое определение вероятности, статистическое определение вероятности, метод комбинатора*
***Key words:*** *probability theory, event, classical definition of probability, statistical definition of probability, combinator method*

Hər bir şagird, hər bir tələbə ətraf mühitdə baş verən təsadüfi hadisələri və onların baş verməsinin qanunauyğunluqlarını demək olar ki, bilirlər. Lakin onlar təsadüfiliyin elmi əsaslarını şüurlu surətdə mənimsəməkdə çətinlik çəkirlər. Ona görə də ilk dərslərdə onları təbiət və cəmiyyətdə baş verən təsadüfi hadisələr, onların baş verməsində qanunauyğunluqların obyektiv surətdə mövcud olması ilə yaxından tanış etməyin xüsusi əhəmiyyəti vardır.

Bunun üçün aşağıdakı misallardan istifadə etmək faydalı olar. Tutaq ki, təbii şəraiti eyni olan hər hansı sahədə ölçüsü, növü eyni olan eyni dərinlikdə buğda toxumları əkilmişdir. Bu toxumların hər birinin ayrılıqda nə qədər məhsul verəcəyini əvvəlcədən demək olmaz. Lakin bunların hər birindən eyni cinsli məhsul götürüləcəyinə böyük ümid bəsləmək olar. Əgər toxumları quru torpağa əkmiş olsaq və onu rütubətdən tamamilə məhrum etsək, qəti demək olar ki, həmin sahə məhsul verməyəcəkdir.

Bu misaldan belə bir nəticə çıxarmaq olar ki, hər hansı hadisə haqqında bizim qabaqgörənliyimiz, o hadisəni törədən səbəblər haqqında nəyi bilməyimizdən və nə dərəcədə bilməyimizdən asılıdır. Buna görə də təsadüfi hadisələrin qanunauyğunluqlarının öyrənilməsi, onları doğuran səbəbləri araşdırmaqdan və düzgün hesaba almaqdan ibarətdir. Hadisə o zaman təsadüfi hesab edilir ki, onun baş verməsi şəraiti və onu törədən səbəblər çox olur və bunların hamısı bizə əvvəlcədən məlum olmur.

Təsadüfi hadisələrin baş verməsində müəyyən qanunauyğunluqlar vardır. Məsələn, yerin müəyyən sahəsində temperaturun neçə dərəcə olacağını əvvəlcədən bilmək çətindir. Çünki temperaturu törədən səbəblər çoxdur. Lakin buna baxmayaraq hava məlumat bürosu bir neçə gün, hətta bir neçə ay və s. ərzində havanın necə olacağı haqqında məlumat verə bilir. Bu, təsadüfi hadisələrin qanunauyğunluqlarını öyrənmək nəticəsində mümkün olur. Təsadüfi hadisələrin qanunauyğunluqlarını öyrənməyə sənayedə, kənd təsərrüfatında, biologiyada, iqtisadiyyatda və s. çox böyük əhəmiyyəti vardır.

Tutaq ki, toxuculuq fabrikində bir neçə dəzgahı bir fəhlə idarə edir. Bu fəhlə hansı dəzgahda sap qırılsa ona yaxınlaşaraq sapı bağlayır, dəzgahı işə salır. Sapın qırılması təsadüfi hadisədir. Bu təsadüfi hadisə bir neçə amildən: sapın keyfiyyətindən, bəzi yerinin nazik olmasından, dəzgah işləyərkən sapın dartılmasından və s. asılıdır. Dəzgahı idarə edən fəhlənin işinin miqdarını, sərf edəcəyi vaxtı və beləliklə də onun əmək haqqını müəyyən etmək, təsadüfi hadisələrin qanunauyğunlunu bilməyin köməyi ilə olur.

Ehtimalın elmi tərifi tarixən müşahidənin məntiqi təhlili və onun təcrübəyə müvəffəqiyyətlə tətbiqi nəticəsində yaranmışdır.

Ehtimal nəzəriyyəsinin klassikləri hesab edilən Y. Bernulli, P. Laplas, P.L. Çebışev, A.A. Markov ehtimal anlayışına eyniimkanlı hadisələr əsasında tərif vermişlər. Buna ehtimalın klassik tərifi deyilir.

Sonralar klassik tərifin əsas nöqsanları müəyyən edilmiş və bunun nəticəsində P. Mizesin statistik tərifi və S.N. Bernşteyn - A.N. Kolmoqorovun aksiomatikası meydana gəlmişdir. Orta məktəblər üçün yazılmış dərslikdə (Cəbr və analizin başlanğıcı, XI sinif) ehtimalın klassik tərifi aşağıdakı kimi ifadə olunur.

**Tərif.** *A* hadisəsi üçün əlverişli hallar sayının bütün eyniimkanlı hadisələr sayına nisbətinə *A* hadisəsinin ehtimalı deyilir.

*n* sayda eyni olan təcrübədə *A* hadisəsi üçün *m* sayda əlverişli hal varsa, *A* hadisəsinin ehtimalı $P(A)=\frac{m}{n}$ düsturu ilə hesablanır.

Bu tərifə hadisənin ehtimalının klassik tərifi deyilir. Aşkardır ki, $0\le m\le n$ olduqda, $0\le P(A)\le 1$ olur.

Əgər $m=n$ olarsa, yəni nəticənin hamısı *A* hadisəsi üçün əlverişlidirsə, $P(A)=\frac{n}{n}=\frac{m}{m}==1$ olur. Deməli, yəqin hadisənin ehtimalı 1-ə bərabərdir.

Əgər $m=0$ olarsa, yəni heç bir nəticə *A* hadisəsi üçün əlverişli deyilsə, $P(A)=\frac{0}{m}=0$ olur. Deməli, mümkün olmayan hadisənin ehtimalı 0-a bərabərdir.

Ehtimalın klassik tərifinin köməyi ilə məsələ həlli nümunələrinə baxaq.

**Məsələ 1.** İki oyun zəri atılmışdır. Aşağıdakı hadisələrin ehtimallarını tapın:

a) düşən xallar cəminin 7-yə bərabər olması (*A* hadisəsi);

b) düşən xallar cəminin 8-ə, fərqinin isə 4-ə bərabər olması (*B* hadisəsi);

c) düşən xallar fərqinin 4-ə bərabər olması məlumdursa, cəminin 8-ə bərabər olması (*C* hadisəsi);

ç) düşən xallar cəminin 5-ə, hasilinin isə 4-ə bərabər olması (*D* hadisəsi).

**Həlli.** a) Hər zər üçün mümkün hallar sayı 6-dır. Vurma qaydasına əsasən *A* hadisəsi üçün mümkün hallar sayı $n(A)=6\cdot 6=36$. *A* hadisəsi üçün (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3) (və yalnız onlar) əlverişli hallardır ((1,6) – birinci zərdə 1, ikincidə 6 xalın düşməsidir və s.). $n(A)=6$. Ona görə də

$$P(A)=\frac{m(A)}{n(A)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

b) Bu halda $n(B)=36$. (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4) halları birinci tələbi ödəyir (cəm 8-dir), ikinci tələbi isə yalnız (2,6), (6,2) halları ödəyir (böyükdən kiçik çıxılır). Ona görə də *B* hadisəsi üçün əlverişli hallar sayı 2-dir: $m(B)=2$. Deməli,

$$P(B)=\frac{m(B)}{n(B)}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

c) Fərqi 4-ə bərabər olan hallar yalnız (2,6), (6,2), (1,5), (5,1)-dir. Deməli, $n(C)=4$. Əlverişli hallar sayı isə yalnız (2,6), (6,2)-dir: $m(C)=2$. Ona görə də

$$P(C)=\frac{m(C)}{n(C)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

ç) Bu halda $n(D)=36$. Cəmi 5-ə bərabər olan hallar yalnız (4,1), (1,4), (2,3), (3,2)-dir. Bunlar arasında hasili 4-ə bərabər olanlar (4,1), (1,4)-dir. Ona görə də $m(D)=2$-dir. Deməli,

$$P(D)=\frac{m(D)}{n(D)}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

**Məsələ 2.** Hədəfi birinci atıcının vurma ehtimalı $\frac{4}{5}$-ə, ikinci atıcının vurma ehtimalı $\frac{2}{3}$-yə bərabərdir. Atıcılardan heç olmasa biri hədəfi vursa hədəf dağılır. Atıcılar eyni zamanda atəş açarsa hədəfin dağılma ehtimalını tapın (*A* hadisəsi).

**Həlli.** Məsələni başqa formada ifadə edək: tutaq ki, iki qutunun hər birində 1-dən 15-ədək nömrələnmiş kürəcik var $\left(\frac{4}{5}=\frac{12}{15},\frac{2}{3}=\frac{10}{15}\right)$. Birinci qutudakı kürəciklərdən 12-si qırmızı, 3-ü qara; ikinci qutudakı kürəciklərdən 10-u qırmızı, 5-i qaradır. Çıxarılmış 2 kürəcikdən heç olmasa birinin qırmızı olması (*A* hadisəsi) ehtimalını tapın.

Birinci qutudakı hər bir kürəcik ikinci qutudakı kürəciyin hər biri ilə çıxarıla bildiyindən, mümkün hallar sayı $n(A)=15\cdot 15=225$-dir. Əlverişli hallar sayını hesablayaq. Birinci qutudakı 12 qırmızı kürəcik ikinci qutudakı kürəciklərdən istənilən biri ilə çıxarıldıqda, çıxarılmış kürəciklərdən biri qırmızı olacaq. Belə hallar sayı $12\cdot 15=180$-dir. Birinci qutudakı 3 qara kürəcik ikinci qutudakı 10 qırmızı kürəciklərdən istənilən biri ilə çıxarıldıqda da çıxarılmış kürəciklərdən biri qırmızı olacaq. Belə hallar sayı $3 \cdot 10 = 30$-dur. Deməli əlverişli hallar sayı $m(A) = 180 + 30 = 210$-dur. Çıxarılmış 2 kürəcikdən heç olmasa birinin qırmızı olması (*A* hadisəsi) ehtimalı: $P(A) = \frac{m(A)}{n(A)} = \frac{210}{225} = \frac{14}{15}$.

Bu həm də hədəfin dağılma ehtimalıdır.

Tez-tez mümkün elementar nəticələri sonlu olan elə sınaqlar (təsadüfi) qarşıya çıxır ki, praktiki müşahidələrinə və ya nəzəri arqumentlərinə əsasən bu nəticələrdən heç birinə üstünlük vermək, yəni onlardan hər hansı birinin digərindən daha tez-tez baş verəcəyini iddia etmək olmur. Sınağın nəticələrinə nəzərən belə simmetriklik onların hamısının eyniimkanlı olduğunu göstərir. Bu halda, yəni bütün elementar nəticələrin (elementar nəticələr fəzasında) ehtimalları bərabər olduqda, hər bir sınaq klassik ehtimal sxemi və ya qutular sxemi adlanır. Belə xassəyə əl ilə yoxlanmaqla fərqləndirmək mümkün olmayan, verilmiş sayda kürəciyin olduğu qutudan (qutular sxemi də buradan götürülüb) təsadüfən müəyyən saydasının çıxarılması sınağı və bu kimi sınaqlar malikdir.

Klassik sxemdə hadisəni törədən elementar nəticələrin sayı hesablanarkən tez-tez kombinatorikanın məlum düsturlarından istifadə edilir. Ehtimal məsələlərinin həlli zamanı bu və ya digər kombinator düsturlardan istifadə etməyin mümkün olduğu sınaqların (eksperimentlərin) ayrılması vacibdir. Kombinator düsturlardan hər biri müəyyən qutular sxemində ($k$ sayda müxtəlif elementi olan ilkin çoxluqdan təsadüfən $l$ saydasının seçilməsindən ibarət ideal sınaqda) elementar nəticələrin ümumi sayını təmin edir. Bu zaman hər belə sınaq aparılarkən hansı üsulla seçim aparılması və müxtəlif seçimlər dedikdə nə başa düşüldüyü aydın şəkildə göstərilir. Seçimin iki prinsipial sxemi var: birinci sxemdə seçim elementlər qaytarılmadan aparılır. Bu o deməkdir ki, $k$ elementdən $l$ elementin hamısı ya eyni vaxtda seçilir, ya da hər dəfə bir element götürülür və götürülmüş element ilkin çox-luqdan çıxarılır. İkinci sxemdə hər dəfə bir element götürülür, götürülmüş element hər addımda hökmən geriyə qaytarılır və növbəti seçimdən əvvəl ilkin çoxluq diqqətlə qarışdırılır. Bu və ya digər qayda ilə seçim aparıldıqdan sonra seçilmiş elementlərin (və ya onların nömrələrinin) ya nizamlanması tələb olunur (yəni ardıcıllıqla düzülə bilərlər), ya da nizamlanma tələb olunmur. Nəticədə müxtəlif $k$ elementli çoxluğun təsadüfən $l$ elementinin seçilməsindən ibarət sınağın (eksperimentin) aşağıda göstərilən qoyuluşları alınır.

I. *Kombinezonlara gətirən seçim üsulu.*

Sınaq, geriyə qaytarılmadan və nizam aparılmadan $k$ elementdən $l$ elementin seçilməsindən ibarətdirsə, sınağın müxtəlif nəticələri olaraq verilmiş $k$ elementli çoxluğun müxtəlif tərkibli $l$ elementli alt çoxluqların sayı, yəni $C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}$ ədədi götürülməlidir. Yəni baxılan hadisə üçün mümkün hallar sayı $n = C_k^l$-dir.

**Məsələ 3.** Azərbaycan əlifbasının ilk 15 hərfindən təsadüfən götürülmüş dördü arasında *a* hərfinin olması ehtimalını tapın.

**Həlli.**

{Təsadüfən götürülmüş dörd hərf arasında $a$ hərfi var} hadisəsini *A* ilə işarə edək.

Mümkün hallar sayı 15 elementli çoxluğun 4 elementli alt çoxluqları sayına bərabərdir:

$$C_{15}^4 = \frac{15!}{4!\,(15-4)!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

*A* hadisəsi üçün əlverişli hallar sayı uyğun *A* çoxluğunun elementləri sayı $n(A)$-ya bərabərdir. *a* hərfi *A* çoxluğuna daxil olduğundan *A*-nın elementləri sayı 14 elementli (15 hərfdən biri çıxarılıb) çoxluğun 3 elementli (4 hərfdən biri *A*-dadır) alt çoxluqları sayına bərabərdir:

$$m = n(A) = C_{14}^3 = \frac{14!}{3!\,(14-3)!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Beləliklə, axtarılan ehtimal $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{4}{15}$-ə bərabər olur.

II. *Aranjemanlara gətirən seçim üsulu.*

Sınaq, geriyə qaytarılmadan və nizamlamaqla $k$ elementdən $l$ elementin seçilməsindən ibarətdirsə, sınağın müxtəlif nəticələri olaraq verilmiş $k$ elementli çoxluğun ya elementləri ilə, ya da elementlərinin düzümü ilə fərqlənən $l$ elementli alt çoxluqları sayı, yəni $A_k^l = \frac{k!}{(k-l)!}$ ədədi götürülməlidir. Yəni baxılan hadisə üçün mümkün hallar sayı $n = A_k^l$-dir. Xüsusi halda $l = k$ olarsa, sınaq $k$ elementli çoxluğun aranjemanları sayının tapılmasından ibarətdir:

$$n = A_k^k = P_k = k!.$$

**Məqalənin aktuallığı.** Son illər orta məktəb "Riyaziyyat" tərsliklərinə ehtimal nəzəriyyəsinin bəzi elementləri daxil edilib. Mövcud dərsliklərdə bu mövzular kifayət qədər verilmədiyindən baxılan problemin tədqiqinin nəticələri ehtimal nəzəriyyəsinin təliminin intensivləşdirilməsində aktuallıq kəsb edir.

**Məqalənin elmi yeniliyi.** Ehtimal məsələlərinin həlli zamanı bu və ya digər kombinator düsturlardan istifadə edilməsi.

**Məqalənin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi.** Tədqiqatın nəticələrindən riyaziyyatı dərindən öyrənən siniflərdə, şagirdlərin ali məktəblərə qəbul imtahanlarına və olimpiadalara hazırlığı üçün istifadə edilə bilər.

## ƏDƏBİYYAT

1. Mərdanov M.C., Yaqubov M.H. və b. Cəbr və analizin başlanğıcı: 11-ci sinif üçün dərslik. Bakı, 2003.
2. Yaqubov Ə.H. Çoxluqlar, kombinatorika və ehtimal nəzəriyyəsinin əsasları. Bakı: Çaşıoğlu, 2008.
3. Ağayarov M.H., Vəliyev M.M., İsmayıl C.Q. Kombinatorika və ehtimal nəzəriyyəsi: V-XI siniflər üçün. Sumqayıt, 2013.

**М.Я. Гозалова, У.Ф. Мусаева**

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ И КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### *РЕЗЮМЕ*

В статье описывается, как студенты могут ознакомиться с элементами теории вероятностей. С помощью классического определения вероятности были решены типовые задачи. В классической схеме дан комбинированный метод расчета вероятности.

**M.Y. Gozalova, U.F. Musayeva**

## ELEMENTS OF PROBABILITY THEORY AND COMBINATION METHOD OF PROBABILITY CALCULATION IN PROBABILITY THEORY

### *SUMMARY*

The article describes ways in which students can familiarize themselves with the elements of probability theory. With the help of the classic definition of probability, type issues have been solved. In the classical scheme, the combination method of probability calculation is given.

**Redaksiyaya daxil olub:** 06.12.2017