MƏKTƏB RİYAZİYYAT KURSUNDA VEKTORLAR CƏBRİ ELEMENTLƏRİNİN METRİK MƏSƏLƏLƏR HƏLLİNƏ TƏTBİQİ

Zümrüd Əzizova,
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
E-mail emerald.aziz@bk.ru

Rəyçilər: *ped.ü.elm.dok.,prof.* A.S. Adıgözəlov,
ped.ü.elm.dok.,dos. N.B. Nəsirov

Açar sözlər: *vektor, uzunluq, parça ,bucaq*
Ключевые слова*; вектор, длина, отрезок ,угол*
Keywords*; vector, length. piece. angle*

Vektorlar cəbrinin elementləri məktəb riyaziyyat kursuna son dövrlərdə daxil edilmişdir. Onun nəzəri məsələlərinin məzmunu həll olunsa da onun tədrisi metodikasında həlli vacib olan problemlər qalmaqdadır. Vektorlar cəbri həndəsənin və fizikanın bir çox anlayışlarının mahiyyətini adekvat şəkildə göstərmək imkanı verir. Vektorlar cəbrində analitik və həndəsi tədqiqat metodlarının birləşməsi vektorial düstur və nəticələrin yığcamlığı, aydınlığı və əyaniliyi ilə fərqlənir. Fiziki qanunauyğunluqları ifadə edən vektor düsturları bu ya digər koordinat sisteminin seçilməsindən asılı deyildir, yəni invariant xarakterlidir və hadisələrin mahiyyətini düzgün şəkildə əks etdirir.

Didaktik imkanlar baxımından vektorlar məktəb riyaziyyat kursunun digər üsullarla çətin həll olunan bir sıra məsələlərinin həllini sadələşdirir. Məktəb həndəsə kursunda vektorlar bir sıra teoremlərin isbatını nəinki şagirdlərə daha anlaşıqlı çatdırma imkanı verir, həm də əyaniliyi və təbiiliyi cəhətdən teoremlərin isbatı və məsələ həlli yollarını daha asan yolla öyrətməyə kömək edir. Vektor anlayışı məktəb fizika kursunun da mühüm anlayışıdır və riyaziyyatın və fizikanın fənlərarası əlaqələrində aparıcı rol oynayır.

Vektorlar cəbri elementlərinin tədrisində bir sıra çətinliklər mövcuddur. Vektor anlayışının özünün daxil edilmə üsulu müəyyən problemlər yaradır. Belə ki, vektora ən geniş yayılmış istiqamətlənmiş parça kimi tərif verilməsi onunla nəticələnir ki, şagirdlər vektoru parça kimi qəbul edir və onu həndəsi fiqur hesab edirlər. Əslində isə vektor müəyyən həndəsi təsvirdən ibarət olub, başqa təbiətli riyazi obyektdir. Vektorlar üzərində hesab əməlləri və onların xassələrinin mahiyyətini dərindən anlamayan şagirdlər mühüm faktları tez yaddan çıxarırlar. Bu da əsasən onunla izah olunur ki, vektorların tətbiqi ilə məsələ həllinə və teoremlərin isbatına ciddi yanaşılmır, alınan nəzəri və praktik biliklər demək olar ki, dərinləşdirilmir və ümumiləşdirməyə yer verilmir.

Yuxarıda göstərilən mühakimələr bu nəticəyə gəlməyə imkan verir ki, məktəb riyaziyyat kursunda vektorlar cəbri elementlərinin tədris olunması zərurətinə artıq heç bir şübhə yeri yoxdur. Eyni zamanda, bu mövzunun tədrisi prosesində müəyyən problemlərin yaranması qaçılmazdır. Çox zaman vektorlar cəbri elementlərinin tədrisi vektorlar üzərində sadə vərdişlər aşılayan “cansıxıcı” çalışmaların həlli ilə tamamlanır. Vektorlar faktik olaraq tətbiq olunmur. Şagirdlərin idrak fəallığının yüksəldilməsində, məntiqi təfəkkürünün formalaşmasında və inkişafında vektor metodunun imkanlarından tam istifadə olunmur. Halbuki, həm cəbrin və həm də həndəsənin tədrisi prosesində vektorların bir metod kimi geniş tətbiqi bu fənlərin vahid riyaziyyatın tərkib hissələri kimi qəbul edilməsi təsəvvürlərini xeyli zənginləşdirmiş olardı.

Vektorların skalyar hasili yalnız həndəsədə deyil, bəzi cəbri məsələlərin tədrisində, sistem tənliklərin həllində, bərabərsizliklərin isbatında, tənliklərin və ekstremumun tapılması məsələlərinin həllində müvəffəqiyyətlə tətbiq oluna bilər. Skalyar hasildən istifadə etməklə məsələlərin həlli şagirdlərdə və müəllimlərdə böyük maraq doğurur.

“İki vektorun skalyar hasili ”mövzusunda aşağıda istifadə olunacaq əsas faktları nəzərdən keçirək.

İki sıfır olmayan vektorun skalyar hasili bu vektorların uzunluqları ilə onlar arasındakı bucağın kosinusu hasilinə bərabərdir.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

$|\cos\alpha|\leq 1$ olduğundan

$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ (1)

yazmaq olar.

Əgər $\vec{a}(a_1,b_1)$ və $\vec{b}(a_2,b_2)$ vektorları verilibsə, onda $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2$ və $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+b_1^2}$,

$|\vec{b}|=\sqrt{a_2^2+b_2^2}$ və uyğun olaraq

$$a_1a_2+b_1b_2\leq\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2} \quad (2)$$

alınar.

Analoji olaraq üçölçülü fəza üçün $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\leq\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$ (3)

alarıq.

Vektor metoduna yiyələnmək üçün ilk öncə verilənləri cəbri dildən vektor dilinə çevirməyi öyrənmək lazımdır. Məsələn, $\sqrt{x^2+y^2}$ və ya $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ şəklində cəbri ifadələr hər hansı bir vektorun müstəvidə və ya fəzada uzunluğudur. İndi də bəzi cəbri məsələlərin vektor metodu ilə həllini nəzərdən keçirək.

1. İsbat edin ki, ixtiyari x,y və z üçün $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2\geq xyz(x+y+z)$ doğrudur.

İsbatı. $\vec{a}(xy,yz,zx)$ və $\vec{b}(xz,xy,yz)$ vektorlarını daxil edək.

Bu vektorların skalyar hasili $\vec{a}\cdot\vec{b}=x^2yz+xy^2z+xyz^2=xyz(x+y+z)$; uzunluqları $|\vec{a}|=\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{x^2z^2+x^2y^2+y^2z^2}$ və $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$ olar.

Buradan $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2\geq xyz(x+y+z)$ alırıq.

2. İstənilən a,b,c üçün $abc^2+bca^2+cab^2\leq a^4+b^4+c^4$ bərabərsizliyinin doğruluğunu isbat edin.

İsbatı. $\vec{a}(ac;ba;cb)$ və $\vec{b}(bc,ca,ab)$ **vektorlarını daxil edək və onların uzunluqlarını tapaq.**

$|\vec{a}|=\sqrt{a^2c^2+b^2a^2+c^2b^2}$ və $|\vec{b}|=\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$

(3) münasibətinə əsasən $abc^2+bca^2+cab^2\leq a^2c^2+b^2a^2+c^2b^2$ alarıq.

Digər $\vec{a}(a^2;b^2;c^2)$ və $\vec{b}(c^2;a^2;b^2)$ vektorlarını nəzərdən keçirək və onların skalyar hasilini tapıb

(3) düsturunu tətbiq edək. Onda

$\vec{a_1}\cdot\vec{b_1}=a^2c^2+b^2a^2+c^2b^2\leq\sqrt{a^4+b^4+c^4}\cdot\sqrt{c^4+b^4+a^4}=a^4+b^4+c^4$

olar.

Beləliklə, $abc^2+bca^2+cab^2\leq a^2c^2+b^2a^2+a^2b^2\leq a^4+b^4+c^4$ alırıq.

Bunun da isbatı tələb olunurdu.

3. $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$ tənliyini həll edək.

Həlli: $\vec{a}(\sqrt{1+x};\sqrt{3-x})$, $\vec{b}(x;1)$ və vektorlarını daxil edək . Onda verilmiş tənliyi $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ şəklində yazmaq olar. Bu halda vektorların koordinatlarının mütənasib olduğu ödənilir. Belə ki, $x=0$ tənliyin kökü olmadığı üçün $\frac{\sqrt{1+x}}{x}=\sqrt{3-x}$ yazmaq olar.

Buradan $x^3-3x^2+x+1=0$ və ya $(x-1)(x^2-2x-1)=0$ alırıq. Həmin tənlikləri həll etsək,

$x_1=1$, $x_2=1+\sqrt{2}$ ($(x>0)$) olar.

İndi də skalyar hasilin triqonometrik tənliklərə tətbiqinə aid bir misalı nəzərdən keçirək.

4. $\sin x\cdot\sqrt{1-\cos^2x}+\sqrt{1+\cos^2x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sin^2x+1}$

Həlli. $\vec{a}(\sin x;1)$, $\vec{b}(\sqrt{1-\cos^2x};\sqrt{1+\cos^2x})$ vektorlarını daxil edək.

Onda $|\vec{a}|=\sqrt{\sin^2x+1}$, $|\vec{b}|=\sqrt{1-\cos^2x+1+\cos^2x}=\sqrt{2}$ və

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sin x\cdot\sqrt{1-\cos^2x}+\sqrt{1+\cos^2x}$

alırıq, belə ki, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ şərtinə əsasən $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, yəni eyniistiqamətli vektorlar olduğundan müvafiq koordinatlar mütənasibdir, onda

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$1+\cos^2 x = 1$ və ya $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ alarıq.

Bu üsulla tənliklər sisteminin həlli də böyük maraq doğurur. Bu, ənənəvi üsullardan daha sadə ola bilər. Belə ki, müstəvidə vektorların skalyar hasili fəzada vektorların skalyar hasili ilə analojidir.

5. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=12 \\ \log_x y^2 = z \end{cases}$$

Həlli. $\vec{u}$ (x,y,z), $\vec{e}$ (1,1,1) vektorlarını daxil edək. Onda

$\vec{u}\cdot\vec{e} = x+y+z=6$; $|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{12}$,

$|\vec{e}| = \sqrt{3}$; $|\vec{u}|\cdot|\vec{e}| = \sqrt{12}\cdot\sqrt{3} = 6$ $\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{e} = |\vec{u}|\cdot|\vec{e}| \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$;

Burdan $x = y = z = 2$ alırıq.

Cavab: (2; 2; 2).

Göründüyü kimi bu metod cəbr məsələləri həllinin səmərəliliyini artırır, nəticəni daha tez əldə etməyə imkan verir.

Problemin aktuallığı. Son dövrlərdə məktəb riyaziyyat kursuna vektorlar cəbrinin elementləri daxil edilmişdir. Vektorların nəzəri məsələlərinin məzmunu həll olunsa da onun tədrisi metodikasında həlli vacib olan problemlər qalmaqdadır. Vektorlar cəbri həndəsənin və fizikanın bir çox anlayışlarının mahiyyətini aşkar şəkildə göstərmək imkanı verir.

Problemin elmi yeniliyi. Vektorların məktəb riyaziyyat kursundan bir sıra bərabərsizliklərin isbatına tətbiqi nümunələri işlənmişdir.

Problemin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Məqaləni ora məktəb şagirdləri və ali məktəb tələbələri istifadə edə bilər.

ƏDƏBİYYAT

1. Həsənova X.S. Orta məktəbdə vektor anlayışının daxil edilməsi üsulları haqqında // Fizika, riyaziyyat və informatika tədrisi, 2010, № 1
2. Mərdanov M.C və b. Həndəsə: Ümumtəhsil məktəblərinin 8-ci sinfi üçün dərslik. Bakı: Çaşıoğlu, 2004.
3. Poqorelov A.V. Həndəsə: Orta məktəbin 7-11-ci sinifləri üçün dərslik Bakı: Maarif, 1991.
4. Kolmoqorov A.N. Həndəsə: Orta məktəblərin 6-8-ci sinifləri üçün dərs vəsaiti. Bakı: Maarif 1983.
5. Гасанова Х.С. О связи между геометрическим и координатным толкованиями при изучении векторов.

З. Азизова

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ВЕКТОРОВ ПРИ РЕШЕНИИ МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

РЕЗЮМЕ

Методика изучения темы векторов известна, но есть ряд серьезных задач, которые требуют решения. Векторы дают возможность решать как геометрические, так и физические задачи. В статье рассмотрены примеры применения векторов при решении геометрических задач.

Z. Azizova

THE USE OF ALGEBRAIC ELEMENTS OF VECTORS FOR THE SOLVING OF METRIC TASKS AT THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

SUMMARY

The methodology for studying the subject of vectors is known, but there are a number of serious problems that need to be addressed. Vectors allow you to solve both geometric and physical problems. Examples of the application of vectors in the solution of geometric problems are considered in the article.

Redaksiyaya daxil olub: 05.12.2017