İTERASİYA ÜSULU VƏ ONUN TƏDRİSİ METODİKASI

Elşanə Abdullayeva,
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti
Email: elshane.abdullayeva@gmail.com

Rəyçilər: *ped.ü.elm.dok., prof.*A.S. Adıgözəlov,
riyaz.ü.elm.dok., prof. İ.C. Mərdanov

Açar sözlər: *iterasiya, yaxınlaşma, artım, funksiya, ardıcıl, proqram*
Ключевые слова: *итерация, приближение, рост, функция, последовательно, программа*
Key words: *iteration, approach, increase, function, systematically, program*

Hesablama riyaziyyatında bir çox tənliklərin dəqiq həll alqoritmi yoxdur. Müəyyən sayda cəbri və transendent tənliklər var ki, onların dəqiq həll alqoritmi vardır. Biz bilirik ki, bir , iki, üç və dört dərəcəlii tənliklərin həllinin alqoritmi asanlıqla verilə bilir. Məsələn, $ax = b, (a \neq 0)$:; $ax^2 + bx + c = 0$ tənliyi üçün $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ həllinin tapılması alqoritmi vardır. Bundan əlavə olaraq üç dərəcəli tənliklərin, dörd dərəcəli tənliklərin də həll alqoritmlərini yazmaq olar. Dərəcəsi beş və daha artıq olan tənliklərin həlli isə problem yaradır. Bu məsələnin araşdırılması ilə hesablama riyazziyyatı məşğul olur. Qalua və daha sonra Abel isbat etmişdir ki, bu cür tənliklərin dəqiq həll alqoritmi yoxdur. Alqoritmin araşdırılması ilə məşğul olaq.

Həlli olmayan tənliklərin təqribi həllini tapmaq mümkündür. Yüksək dərəcəli tənliklər üçün həll alqoritmi tərtib edəcəyik. Ümumiyyətlə, tənlik və onun həlli məktəb kursunda verilir. Məchul əvəzinə şagirdlərə müxtəlif formalı xanalar təqdim olunur. Dairə, kvadrat və s. formalı fiqurlar istifadə olunur. Yuxarı siniflərə keçdikdə isə tənliyin tərifi daxil edilir. "Məchulu olan bərabərliyə tənlik deyilir." Bundan sonra atrıq tənliyin kökünün tapılması anlayışlarına keçmək olar. Artıq şagirdlərdə tənlik anlayışı daha ümumi şəkildə formalaşır.

Tənliklərin təqribi həll üsulları çoxdur. Bura daxildir: parçanı yarıya bölmə, vətərlər, toxunanlar, iterasiya üsulu. Biz itersiya üsulu ilə yaxından tanış olacağıq. Iterasiya üsulunu başqa cür ardıcıl yaxınlaşmalar kimi də adlandırmaq olar. Bu üsulun tarixi çox qədim zamanlara dayanır. Deyilənlərə görə, eramızdan 500 il əvvəl yaşamış Zenon tərəfindən işlənmişdir. Zenon isbat etməyə çalışmışdır ki, həyatda hərəkət yoxdur. Bunu göstərmək üçün Zenon bir nümunə göstərmişdir. Axillesin hərəkət edən tısbağaya çata bilməməsi məsələsinə toxunmuşdur. Axilles nə qədər məsafə qət etsə də, tısbağaya çata bilməmişdir. Burada ki, əsas məsəlsə odur ki , Axillesla tısbağa arasında məsafə həmişə qalacaqdır.

Iterasiya üsulunun əasını funksional analizdə keçirilən sıxılmış inikas prinsipi təşkil edir. Bunu izah etməyə çalışaq. Tutaq ki, X tam metrik fəza olub, A operatoru X fəzasını hər hansı elementini həmin fəzanın elementınə çevirir və sıxılmış operatordur. Yəni, $\rho(Ax, Ay) \leq L\rho(x, y), 0 < L < 1$ şərtini ödəyir. Onda $X = AX$ tənliyinin yeganə həlli vardır.

Teorem: $\varphi(x)$ funksiyası [a,b]- də təyin olunan diferensiallanan funksiya və onun bütün qiymətləri [a,b]-yə daxildirsə, $|\varphi' x| \leq q < 1$ şərti ödənilirsəonda $x_n = \varphi(x_{n-1})$ $(n = 1,2,3,..)$ iterasiya prosesi $x_0 \in [a, b]$ - dən asılı olmayaraq yığılandır və $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Limiti $x = \varphi(x)$ tənliyinin [a,b]-də yeganədir.

Isbatı: $x_{n-1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})$ -dır. Laqrajın sonlu artım düsturunu tətbiq etsək alarıq,

$$x_{n+1} - x_n = \left(\varphi' \overline{x_n}\right)(x_n - x_{n-1}), \overline{x_n} \in (x_{n-1}, x_n);$$

Şərtə görə $|\varphi' x| \leq q < 1.$ Onda

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q\,|x_n - x_{n-1}|\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

qiymətlərini verək.

$$|x_2 - x_1| \le q\,|x_1 - x_0|;$$

$$|x_4 - x_3| \le q\,|x_3 - x_2| \le q^3\,|x_1 - x_0|$$

$$|x_{n+1} - x_n| \le q^n\,|x_1 - x_0|$$ alarıq.

Indi də $x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots (x_n - x_{n-1}) + \cdots$ sırasına baxaq və onun birinci $(n+1)$ həddinin cəmi $x_n = S_{n+1}$ olar. $q < 1$ olduğu üçün sıra yığılandır. $\lim x_n = \lim S_{n+1} = x$. Bu həll yeganə həldir. Indi isə əksini fərz edək. Fərz edək ki, bu həə yeganə deyil. Onda x və y kimi həllin olduğunu qəbul edə bilərik. $x - y = \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(c)\cdot(x-y)$ və ya $|x - y|\cdot(1-q) \le 0$ bur-adan x=y alınır.

Yuxarıdakı teorem isbat olunduqdan sonra aşağıdakıları əlavə edək. Teorem $\varphi(x)$ funksiyasının $(-\infty;\infty)$ arasında təyin olunduğu və diferensiallanan olması şərti daxilində də doğrudur. Indi isə yaxınlaşma xətasını qiymətləndirək.

$$|x_{n+p} - x_n| \le |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}|$$

$$+ |x_{n+1} - x_n| \le q_1^{n+p-1}|x_1 - x_0| + q_1^{n+p-2}|x_1 - x_0|$$

$$\cdots + q^n|x_1 - x_0| = q^n|x_1 - x_0|\cdot\frac{1-q^p}{1-q} < \frac{q^p}{1-q}|x_1 - x_0|$$

Buradan çıxır ki, $\{x_n\}$ ardıcıllığı fundamental ardıcıllığdır və $\lim x_{n+p} = d$ – dir. Beləliklə, $|d - x_n| < \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$ olduğunu alarıq. Burada $f(x) = x - \varphi(x)$ yazılış formasından istifadə olunur. $f'(x) = 1 - \varphi'(x) \ge 1 - q,\ f(d) = 0$ olduğu üçün (burada d tənliyin dəqiq həllidir)

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |f(x_n) - f(d)| = |x_n - d|\cdot|\varphi'(x_n)| \ge (1-q)\,|x_n - \xi|, \quad (x_n) \in (x_n, d)$$

buradan

$$|x_n - d| \le \frac{|x_n - \varphi x_n|}{1-q} \le \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1-q} \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|, \quad q \le \frac{1}{2}$$

olarsa, $|d - x_n| \le |x_n - x_{n-1}|$ alarıq. Deməli, ardıcıl yaxınlaşmaların hesablanması o qədər davam etdirilməlidir ki, $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilsin. Burada ε verilmiş dəqiqlikdir.

Bu cür yığılan prosesdə $|d - x_n|$ sıfıra monoton yaxınlaşır. Yəni hər cür sonrakı yaxınlaşma əvvəkindən daha dəqiqdir. Burada x_0 başlanğıc yaxınlaşmadır və o həllə nə qədər yaxın olarsa cavab da bir o qədər dəqiq və düzgün olar.

Əgər x_0 -ı düzgün təyin etməsək, $x_0\ x_n = \varphi(x_{n-1}),\ (n = 1, 2, 3, \dots)\ (a, b)$ intervalından kənara çıxa bilər. Və yaxud da mənasını itirə bilər. Bu dediklәeimizə əsasən yuxarıda dediyimiz teoremi aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.

Teorem: $\varphi(x)$ funksiyası $[a, b]$ - də təyin olunan diferensiallanan funksiya olsa, belə ki, $x = \varphi(x)$ tənliyinin daha dar $[\alpha, \beta]$ aralığında həlli varsa, $\alpha = a + \frac{1}{3}(b - a)$ onda

a) $|\varphi'(x)| \le q < 1,\ a < x < b$

b) başlanğıc həll $x_0 \in [\alpha, \beta]$ olduqda bütün ardıcıl yaxınlaşmalar (a, b) – yə daxildir, ardıcıl yaxınlaşmalar yığılandır və $|d - x_n| < \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$ doğrudur.

İsbatı: Tutaq ki, $x_0 \in [\alpha, \beta]$ onda $x_1 = \varphi(x_0)$–in mənası var. $d = \varphi(d)$ olduğundan

$$|x_1 - d| = |[\varphi(x)]_0) - \varphi d| = |x_0 - d|\,|\varphi'(x_0)| \le q(\beta - \alpha) < \frac{b-a}{3}$$

-dir. Buradan çıxır ki, $x_1 \in [\alpha, \beta]$. Ümumi halda isə

$x_{n-1} \in (a, b)$, $\quad |x_{n-1} - d| < \frac{b-a}{3}$ olduqda $x_n = \varphi(x_{n-1})$ bərabərliyinin mənası var və

$|x_n - d| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi d| \le |x_{n-1} - d| \cdot |\varphi \overline{x_{n-1}}| \le q|x_{n-1} - d| < \frac{b-a}{3}$ ödənilir, yəni $x_n \epsilon [\alpha, \beta]$ $n = 1,2,3, \dots$ asanlıqla götürmək olar ki, $\varphi(x)$ funksiyası tənliyin kökünün hər hansı (a, b) ətrafında işarəsini saxlayırsa və $|\varphi x| \le q < 1$ ödənilirsə, onda 1) $\varphi(x) > 0$ olsa $x_n = \varphi(x_{n-1})$ $(n = 1,2,3, \dots)$, $x_0 \epsilon (a, b)$ ardıcıllığı dəqiq həllə monoton yığılandır.

2) $1 - 1 < -q \le \varphi(x) \le 0$ $x_0 < d$ olsa bütün ardıcıl yaxınlaşmalar (a,b) ətrafına düşər. İterasiya prosesinin yığılması üçün $|\varphi'(x)| \le q < 1$ şərti tələb edilir. Tutaq ki, $a \le x \le b$ aralığında $0 < m_1 \le f(x) \le M_1$. Burada m_1 – lə $f(x)$ – in [a,b] - daki ən kiçik müsbət qiymətini, M_1 – lə $f(x)$-in ən böyük qiymətini götürmək olar. $f(x) = 0$ tənliyini $x = x - \lambda f(x)$ şəklində yazmaq olar. **λ**- ni elə seçirik ki, [a,b] aralığında $0 \le \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \le q < 1$ ödənilsin.

Onda $0 \le 1 - \lambda M_1 \le 1 - \lambda m_1 \le q$ yaza bilərik. $\lambda = \frac{1}{M_1}$ seçək. Onda $q = 1 - \frac{m_1}{M_1} < 1$ ödənilir. Iterasiya prosesində olduqca çox hesablama tələb olunur. Bu o deməkdir ki, köklərim tapılmasında xətalar olduqca çox alınır, xətaları da tapmaq üçün ayrıca düsturlardan istifadə etmək lazımdır. Ona görə də proqramlaşdırma aparmaqla tələb olunan dəqiqliklə dəqiq kökə yaxın təqribi kökü tapmaq olar. Lakin qeyd etdiyimiz kimi bu kök dəqiq olmayacaq. Yuxarıda adını sadaladığımız üsullar hansı ki, vətərlər və toxunanlar üsulu iterasiya üsulunun xüsusi halı kimi nəzərdən keçirilir. İnterativ prosesin proqramını şərti keçid və dövr operatorlarından istifadə etməklə proqramlaşdırmaq olar.

Indi isə isbat etdiyimiz teoremləri bir nümunə əsasında izah etməyə çalışaq. Bunun üçün bizə lazım olan hesab əməllərini qısa olaraq şərh edək. Ümumiyyətlə desək tənlikləri iterasiya üsulu ilə həll etmək üçün törəmə anlayışından istifadə etmək lazımdır. Çünki hesablamalarda törəməyə istinad edilir. Biz özümüzdə teoremləri isbat etdikdə törəməyə toxunmuşuq. Burada bizə lazım olan əsas məsələ törəmə cədvəlini bilməkdir ki, hesablamalarda istifadə edək. bunun üçün isə aşağıdakı misalı bəzərdən keçirək. Məsələn, $5x^3 - 30x + 1 = 0$ tənliyini ε dəqiqliklə həll etmək lazımdır. Burada $\varphi(x)$ elə təyin etmək lazımdır ki, o yuxarıda qeyd etdiyimiz teoremib aşağıdakı şərtini ödəsin. Yəni, $|\varphi'(x)| \le q < 1$, $x \in [a, b]$ - də ödənilsin. Parçanı (0,1) şəklində seçmək olar. Burada tənliyimizi aşağıdakı şəkildə yazsaq daha yaxşı olar. $x = x + 5x^3 - 30x + 1$ kimi yazaq və $\varphi_1(x) = x + 5x^3 - 30x + 1 = 5x^3 - 29x + 1$ kimi yazsaq $|\varphi_1'(x)| > 1$ olacaq. Buradan $x = \sqrt[3]{\frac{29x - 1}{5}}$ yazsaq onda $\varphi_2(x) = \sqrt[3]{\frac{29x - 1}{5}}$ təyin edilər. Bu zaman isə teoremin şərtinə əsasən verilən şərt ödənilmir. Əgər biz $\varphi_3(x) = \frac{5x^3 + 1}{30} = x$ seçsək, $\varphi_3'(x) = \frac{15x^2}{30}$ və buradan isə $|\varphi x| < \frac{15}{30} = \frac{1}{2} < 1$ alınır.

Beləliklə, bir misal üzərində iterasiya prosesinin mahiyyətini aydınlaşdırmağa çalışdıq. Əsas şərt olaraq $\varphi'(x) < 1$ ödənilməlidir. İterasiya üsulu eyni zamanda ikiməchullu qeyri- xətti tənliklər sisteminə də aid edilə bilər.

Bu ümümi proqramda hər misal üçün 40 nişanlı sətirdə $\varphi(x)$ – in paskal dilində yazılışı yazılmalıdır. Məsələn, $x^8 - x - 1 = 0$ tənliyinin həlli tələb olunursa, tənliyin kökünün daxil olduğu aralıq və $\varphi(x)$-in tapılmasıdır. $f(1) = -1 < 0$ olduğunu asanlıqla görmək olur ki, $f(1{,}1) > 0$ dir. Deməli tənliyin $1 < x < 1{,}1$ aralığında kökü var. $x^8 - x - 1 = 0$ tənliyindən $x = \sqrt[8]{x + 1}$ tapırıq.

$$\varphi(x) = \sqrt[8]{x + 1}, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{8\sqrt[8]{(x + 1)^7}}$$

buradan görünür ki, $|\varphi'(x)| < 1$ şərti ödənilir. Onda $x_n = \sqrt[8]{x_{n-1} + 1}$, $n = 1, 2, \dots$ rekurent münasibətindən tapılan ardıcıl yaxınlaşmalar yığılandır.

Problemin aktuallığı. Ümumiyyətlə təqribi ədəd anlayışı şagirdlərdə böyük hesab əməlləri zamanı istifadə olunur. Məhz iterasiya üsulu da bu cür rastlaşdığımız çətinliklərin aradan qaldırılması üçün yüksək səmərə verə bilər. tənliklərin bu cür yolla həll edilməsi hesablamaları sadələşdirir.

Problemin elmi yeniliyi. Bu üsul yeni yanaşmaları tətbinə əsas verir. Bilirik ki, məktəblərdə dərslər artıq kurikulum üsulu ilə keçirilir. Ele buna görə də hər bir yeni dərsi yeni forma və metodlarla keçmək daha yaxşı olar.Ən əsas da fərdi yanaşma üsulundan istifadə edilir.

Problemin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Ümumiyyətlə hesablama üsullarında keçirilən digər üsullar da daxil olmaqla , iterasiya üsulu müxtəlif yerlərda laboratoriyalarda, elmi – texniki universitetlərdə və s. yerlərdə istifadə edilir.

ƏDƏBİYYAT

1) Məmmədov Ə.M., Şükürov R.Y. Hesablama riyaziyyatı. Bakı, 2010.
2) Məmmədov J.C. Təqribi hesablama üsulları. Bakı, 1986.
3) Məmmədov Ə.M. Səfərəliyeva F.Q. Paskal proqramlaşdırma dili. Bakı, 2004.
4) Hüseynov Z.Q. Hesablama üsulları və praktikumu. Bakı, 2003.

E. Abdullayeva

ITERATION METHOD AND ITS METHOD OF ANALYSIS

SUMMARY

There are a certain number of algebraic and transient equaitions which are not exact solution.The solution of 1,2,3 and 4 degree equaitions can easily be given in oltarik.However,it is possible to solve appronimate solutions of 5 or more equations.

Only the accounts methods are engaged in this .It is possible to give approximate equaition solutions.

Э. Абдуллаева

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД И МЕТОДИКА ЕГО ПРЕПОДАВАНИЯ

РЕЗЮМЕ

В статье отмечается, что существует определенное количество алгебраических и трансцендентных уравнений, у которых нет конкретного решения. В уравнениях со степенью один, два, три и четыре можно с легкостью дать алгоритмический метод решения. Но в уравнениях со степенью пять и больше можно дать только приблизительный ответ решения. Именно этим и занимается метод исчисления.

Redaksiyaya daxil olub: 07.12.2017