RİYAZİYYATIN TƏDRİSİ METODİKASI

İQTİSADYÖNLÜ ALİ MƏKTƏBLƏRDƏ MÜƏYYƏN İNTEQRALIN BƏZİ İQTİSADİ VƏ HƏNDƏSİ TƏTBİQLƏRİ METODİKASI

Qabil Namazov,
pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru,
Bakı Biznes Universiteti
E-mail: qabilnamazov-1949@mail.ru

Rəyçilər: *prof.* H.İ. Aslanov,
*dos.*N.R. Abbasov

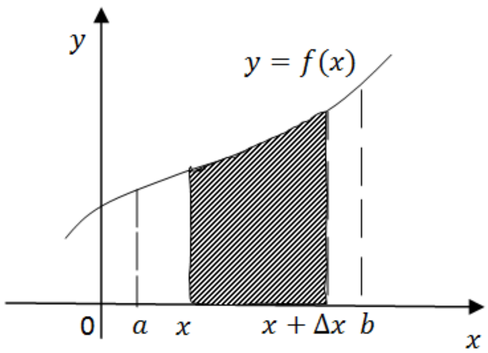
***Açar sözlər**: müəyyən inteqral, sahə vahidi , iqtisadiyyat, tətbiq, hesablanması, məhdudlaşmış fiqur, trapesiya, əyani, təsvir, alqoritm, həll, əyrixətli*

***Ключевые слова:** определенный интеграл, площадь единицы, экономика, применяется, расчет, свернувшаяся фигур, трапеция, наглядным, изображение, алгоритм, решить, криволинейная*

***Key words:** certain integral, the field units, the economy, the application, the calculation, restricted to pieces, trapezium, the visual, the description, algoritms, the solution, curvilinear*

Sahələrin hesablanması üçün mövcud olan ənənəvi üsulların sahələrin hesablanmasına tətbiqində mövcud çətinlikləri nəzərə alaraq iqtisad yönümlü ali məktəblərdə müəyyən inteqralın bəzi iqtisadi və həndəsi tətbiqləri metodikasının verilməsinə ehtiyac vardır.

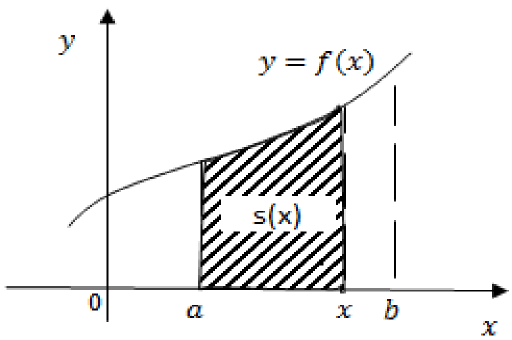
Əyrixətli trapesiya və onun sahəsi haqqında bəzi məlumatları verək. Tutaq ki, OX oxunun [a;b] parçasında kəsilməz və işarəsi dəyişməyən $f(x)$ funksiyası verilmişdir. Bu funksiyanın qrafiki [a; b], parçası, *x=a və x=b* düz xətləri ilə hüdudlanmış fiqura (şəkil 1) əyrixətli trapesiya deyilir.

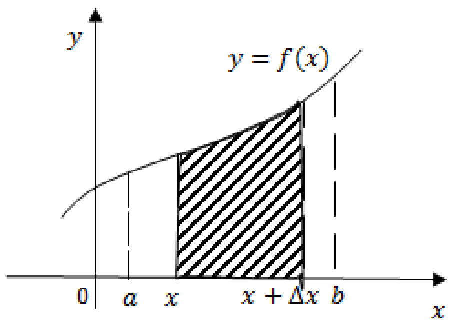


Şəkil 1.

Əyrixətli trapesiyanın sahəsinin hesablamaq üçün aşağıdakı teoremdən istifadə olunur.

Teorem. $f(x)$ funksiyası [a;b] parçasında kəsilməz və mənfi olmayan funksiya, *F(x)* isə bu parçada onun ibtidai funksıyasıdırsa, onda uyğun əyrixətli trapesiyanın (şəkil 2) S sahəsi, [a;b] parçasında ibtidai funksiyanın artımına bərabərdir, yəni:





Şəkil 2.

Başqa sözlə, alınan nəticəni ümumiləşdirsək görərik ki, ixtiyari müstəvi fiqurun sahəsini hesablamaq üçün (1) düsturu yararlıdır.

Tutaq ki, $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ və $x=a$, $x=b$ (şəkil 3) xətləri ilə məhdudlanan müstəvi fiqur Q-dür, $f_1(x) \leq f_2(x)$ şərti ödənildikdə alınan əyrixətli trapesiyanın sahəsi

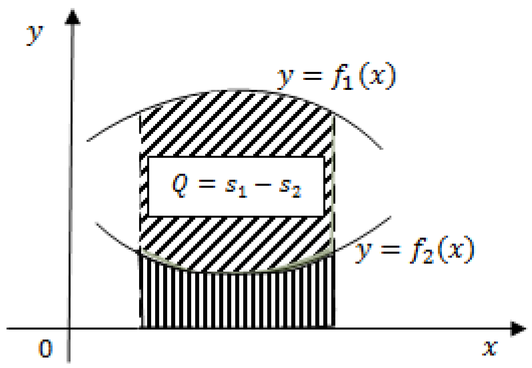
$$Q=S_1\ (a,b)-S_2(a,b)$$

kimi hesablanar.

Başqa sözlə,

$$Q = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx \quad (2)$$

kimi olar.



Şəkil 3.

Bu nəzəriyyənin köməyi ilə bəzi iqtisadi məzmunlu məsələləri həll etmək olar.

Əgər *f(x)* funksiyası fəhlənin iş gününün *x-ci* saatında istehsal gücünü xarakterizə edirsə, onda onun qazancının miqdarı *x* oxu ilə *f(x)* əyrisi arasındakı sahədə dəyişər.

Yuxarıdakı (2) düsturundan görünür ki, əyrixətli trapesiyanın sahəsinin hesablanması, elə müəyyən inteqralın hesablaması deməkdir.

Millimetrli kağızda bu trapesiyanı təsvir edib onun daxilində qalan damaları saymaqla müəyyən inteqralın qiyməti barədə kifayət qədər dəqiqliklə təqribi məlumat almaq olar.

İqtisadi məzmunlu məsələyə uyğun təsvir edilmiş əyrixətli trapesiyanın sahəsinə uyğun sahə vahidinin müəyyənləşdirilməsi vacib məsələlərdəndir.

İqtisadi məzmunlu məsələlərin həllini əyrixətli trapesiyanın sahəsinin hesablanması məsələsinə gətirərək həll edərkən aşağıdakı işləri (alqoritmi) yerinə yetirmək lazımdır.

- verilmiş şərtlər daxilində iqtisadi məsələyə uyğun əyrixətli trapesiyanı koordinat sistemində təsvir etməli;
- sahəni hesablamaq üçün alqoritm tərtib etməli;
- hesablama üsulunu müəyyən etməli;
- sahə vahidini müəyyənləşdirməli.

Burada həmçinin verilmiş xətlərlə məhdudlaşmış fiqurun əyani şəkildə təsvir olunması əsas məsələlərdəndir. Əks halda məsələnin həlli prosesində axtarılan müstəvi fiqurun təyin edilməsində və müəyyən inteqralın sərhədlərinin tapılmasında çətinliklər yaranar. Buna görə də iqtisadi məsələlərin həllini əyrixətli trapesiyanın sahəsinin hesablanması məsələsinə gətirərək həll edərkən gözlənilməsi vacib olan işlərin yerinə yetirilməsində anlaşılmazlıq yaranar. Təcrübə göstərir ki, tələbələrin buraxdığı səhvlərin əksəriyyəti də bunlarla əlaqədar olur.

Tutaq ki, inteqralaltı funksiya olan dəyər-manatla və arqument zaman-günlə ölçülür. Qrafikdə üfüqi xətdə zaman - bir gün 1 millimetrə, şaquli xətdə isə dəyər 1 min manat - 2 sm-ə uyğun qəbul edilmişdir. Onda ölçü vahidi olaraq

1 gün x min man.= 1 min man.gün

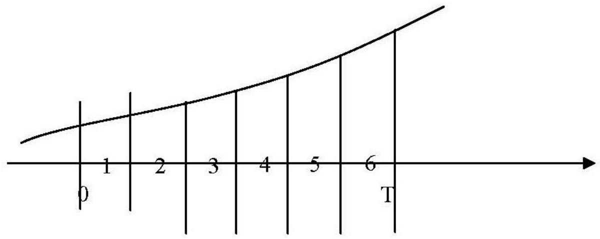
qəbul edilməlidir. Buna uyğun olaraq sahə vahidi

1 mm. x 2 sm.=20 mm^2 olar.

Buradan alınır ki, sahə sm^2-la ölçülərsə onda 1 sm^2-da 5 inteqral vahidi (1 sm^2=5·20 mm^2), başqa sözlə

≪ 5 min man.gün≫ olar.

Toxuculuq fabrikində istehsal - pambığı hazır məhsula çevirməkdən ibarətdir. Fabrikin binası və avadanlıqlardan başqa hər bir anda ümumi qiymətə anbarda olan material - hazır məhsul, tam hazır olmayan parça - əyrilmiş iplik, rənglənməmiş parça və s. təsir edir. Hər bir porsiya (müəyyən edilmiş miqdar) pambığın hazır məhsula çevrilməsi üçün müəyyən zaman vahidi tələb olunur və həm də pambıq müəyyən mərhələlərdən keçdikcə onun qiyməti də dəyişərək artır. İstehsal funksiyası olaraq məhsul vahidinə sərf edilən əməyin dəyəri götürülə bilər. Bu funksiya getdikcə artır və daha çox işçi qüvvəsi və köməkçi materiallar tələb edir. Bu prosesi aşağıdakı ardıcıllıqla göstərmək olar (şəkil 4).



Şəkil 4.

Burada:

1. Əyrilməyə hazırlıq
2. İplik
3. Parça
4. Nəqliyyat
5. Anbar
6. Rənglənmə prosesləridir.

Proses 1, 2, 3, 4, 5, 6 ardıcıllığı zaman oxu boyunca [O, T]-də kəsilməz davam edirsə prosesin müxtəlif anlarında pambığın müəyyən porsiyasının qiyməti yüksələn xətt boyunca dəyişir. Bu prosesin hər bir anında məhsulun qiymətini hesablamaq mümkündür və aşağıdakı inteqralın hesablanmasına gətirilir.

$$\int f(x)dx$$

Burada *x* - istehsalın başlandığı an, *f(x)* - məhsul vahidinə sərf edilən əməyin dəyəri, T - isə prosesə sərf olunan zamanı ifadə edir.

F(x)- manatla, *x* - günlə, pambığın porsiyası *kq*-la ölçülərsə onda hesablanan inteqralın (sahənin) vahidi

$$\frac{\text{"manat} \cdot \text{gün"}}{\text{kq}}$$

olar.

Əgər pambığın miqdarı A olarsa onda son

nəticə $$A \cdot \int_0^T f(x)dx \qquad (4)$$

olar. (4) inteqralında A vuruğunun vahidi

$$\frac{1\ \text{kq}}{\text{gün}}$$

qəbul edilməlidir.

Doğrudan da,

$$\frac{\text{"manat} \cdot \text{gün"}}{\text{kq}} \times \frac{1\ \text{kq}}{\text{gün}} = manat$$

olur ki, bu da qoyulan məsələyə uyğundur.

Belə bir məsələyə baxaq.

1. Dağda tunel qazıntısı aparılır. Görülən iş p.m.-lə "paqonnum.metr" ölçülür. Tunel qazıntısının hər bir hissəsinə çəkilən xərc eyni miqdarda deyil. Bu bir çox detallardan asılı olur. İşçi qüvvəsinin və avadanlıqların daşınmasından, kabel çəkilişindən, elektrik enerjisinin qüvvəsinin və avadanlıqların daşınmasından, kabel çəkilişindən, elektrik enerjisinin ötürülməsindən, həmçinin çəkilən xərc hava şəraitinin dəyişməsindən asılı olaraq dəyişə bilər. Hər bir hissəyə çəkilən xərcin miqdarını hesablamalı.

Tutaq ki, işin əvvəlindən *x* metr məsafədə 1 p.m görülən işin dəyəri *f(x)*-dir. Onda x_1-dən $x_2 -$yə qədər $x_2 - x_1$ uzunluqda məsafədə görülən ümumi işin dəyəri aşağıdakı inteqralla ifadə olunar.

$$\int f(x)dx$$

Bu ifadə x_1 və x_2 arasındakı sahədə maliyyələşmənin ölçüsünü ifadə edir.

İndi isə verilən görülən işin maliyyələşməsini aparaq.

Tutaq ki, tunel qazıntısına sərf edilən xərcin miqdarı (əgər hava şəraiti sabit olarsa)

$$f(x)=10000+10x \qquad (5)$$

qanunu *(funksiyası)* ilə dəyişər.

Onda hava şəraiti və və tuneldə hərəkətlə əlaqədar olaraq *x* hissədə yaranan xərc, *x*-ə mütənasib olaraq artacaq.

Fərz edək ki, işin yerinə yetirilməsi gedişi

$$x = 5t - 0,005t^2 \qquad (6)$$

qanunu ilə dəyişər. Burada *t* vaxtdır (günlə)

Daşınmanın ləngiməsi yolda mümkün çətinliklərin artması ilə izah olunur. (6) düsturuna görə *t* = 500- dən başlayaraq (*x*=1250 olur) gedilən məsafə azalır və nəzərə alınmalıdır ki, iş vaxtından daha tez başa çatır.

Tutaq ki, tunelin uzunluğu 800 metrdir. Bu yol 200 günə qət olunacaq. Başqa sözlə 8 aya (iş günü 25 gün olarsa).

İndi isə işin 3-cü və 4-cü aylarında (başqa sözlə *t* = 50- dən *t*= 100-dək) maliyyələşməni təyin edək.

t anında *dt* intervalında

$$dx = x'\,dt = (5 - 0{,}01t)dt \quad (7)$$

metr yol gedilər.
Bu zaman 1 metrlik yolda

$f(x)=10000 + 10x = 10000 + 10(5t - 0{,}005t^2)$ *(8)*
vəsait tələb olunar.

Uyğun olaraq *dt* intervalında

$$[10000 + 10(5t-0{,}005t^2)](5 - 0{,}001)dt \quad (9)$$

qədər vəsait tələb olunar.
Onda 3-cü və 4-cü aylar uçun cəmi

$$\int_{50}^{100} [10000 + 10(5t - 0{,}005t2)](5 - 0{,}001)dt$$

qədər vəsait tələb olunar.
t dəyişənindən $x=5t - 0{,}005t^2$ dəyişəninə keçməklə hesablamanı sadələşdirmək olar.
Bunun üçün inteqrallama sərhədlərini

$5 \cdot 50 - 0{,}005 \cdot 2500 = 237{,}5$ və $5 \cdot 100 - 0{,}005 \cdot 10000 = 450$

götürmək lazımdır. Bundan başqa

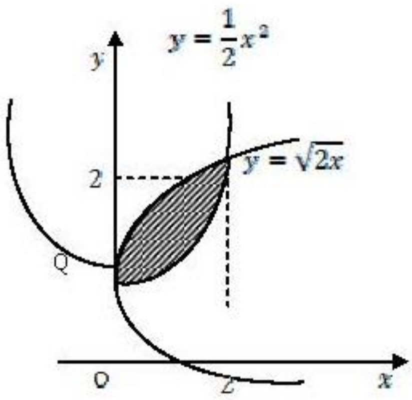
$$(5 - 0{,}1t)\,dt = dx$$

olduğu nəzərə alınmalıdır.

$$\int_{237{,}5}^{450} [10000 + 10x)dx] = 28554{,}75$$

Deməli, 237,5 metrdən 450 metrədək olan aralıqda görülən işin ümumi dəyəri (11) düsturu ilə hesablanar.

2. $y = \sqrt{2x}$ və $y = \dfrac{x^2}{2}$ əyriləri ilə məhdudlaşmış fiqurun sahəsini hesablayın. (şəkil 5.)



şəkil 5.

Həlli. Əyrilərin kəsişmə nöqtələrini tapaq.

$$\sqrt{2x} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow 2x = \frac{x^4}{4} \Rightarrow 8x = x^4 \Rightarrow x_1 = a = 0 \Rightarrow x_2 = b = 2$$

(2) düsturuna görə

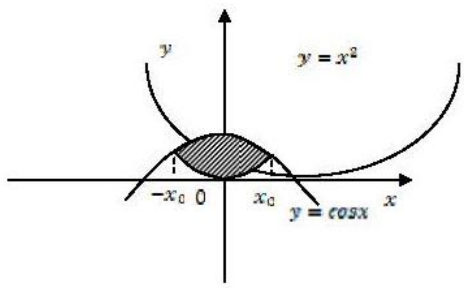
$$Q = \int_0^2 \sqrt{2x}\,dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 - \frac{1}{2\cdot 3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$Q = \frac{4}{3}\,(s \cdot v)$$

3. $y=\cos x$ və $y=x^2$ əyriləri ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini milyonda bir dəqiqliklə hesablayın. (şəkil 6)
Həlli. Əyrilərin kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını tapaq.

$\cos x = x^2$
$\cos x - x^2 = 0$

alınan transendent tənliyi həll edərək, alarıq.



Şəkil 6.

x= $\pm x_0$, x_0 = *0,824132 belə ki,* x_0^2 = *0,679194,* $\cos x_0$ = *0,679194 onda (2)*

düsturuna görə

$$Q = \int_{-x_0}^{x_0} (\cos x - x^2)dx = (\sin x - \frac{x^3}{3}) \Big|_{-x_0}^{x_0} = 2\left(\sin x_0 - \frac{x_0^3}{3}\right) =$$

$$= 2(0{,}733959 - \frac{0{,}559746}{3}) = 1{,}094754$$

$$Q = 1{,}094754 \ (s.v)$$

($\sin x_0$ = sin0,824132 radian = 0,733959 və $\cos x_0$ = cos0,824132 radian = =0,679194 qiymətləri interpolyasiyanın köməyi ilə alınmışdır).

4. $y= \sqrt{x}$; $y = \sqrt{3-2x}$ və $y = 0$ xətləri ilə əhatə olunmuş fiqurun sahəsini tapın. (şəkil 7)

Həlli. Sahəsi axtarılan 7-ci şəkildə göstərilib. Bu fiqur iki ədəd əyrixətli trapesiyanın birləşməsindən ibarətdir.

$S = S_1$

Əyrilərin kəsişmə nöqtələrini tapaq.

Riyazi biliklərə mükəmməl yiyələnmədən və ondan istifadə etmək bacarığı olmayan heç bir məzun bazar iqtisadiyyatı şəraitində səriştəli kadr rəqabətinə tab gətirə bilməz.

Problemin aktuallığı: Məqalədə sahələrin hesablanması üçün mövcud olan ənənəvi üsullar vasitəsi ilə verilmiş məsələnin həllində çətinliklərlə əlaqədar mövzunun aktuallığı qeyd edilmişdir. Belə ki, müxtəlif məsələlərin həlli vasitəsi ilə sahələrin hesablanmasının mövcudluğu və sadəliyi göstərilmişdir

Problemin elmi yeniliyi: İqtisadi məzmunlu məsələlərin həllini əyrixətli trapesiyanın sahəsinin hesablanması məsələsinə gətirməklə həll etmək üçün alqoritm müəyyənləşdirilmişdir. Burada həmçinin verilmiş xətlərlə məhdudlaşmış fiqurun əyani şəkildə təsvir olunması və sahə vahidinin müəyyənləşdirilməsi əsas məsələ kimi qeyd edilmişdir.

Problemin praktik əhəmiyyəti: Verilmiş xətlərlə məhdudlaşmış fiqurun əyani şəkildə təsvir olunmasının vacibliyi əsas məsələ kimi qeyd edilmişdir. Əks halda məsələnin həlli prosesində axtarılan müstəvi fiqurun təyin edilməsində və müəyyən inteqralın sərhədlərinin tapılmasında çətinliklər göstərilmişdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебник. М., 2007.
2. Namazov Q.M. Ali Riyaziyyat I- hissə. Dərs vəsaiti. Bakı: Biznes Universitetinin nəşriyyatı, 2012.
3. Левитас. Г.Г. Методика преподавания математика в основной щколе. Астраханский Университет», 2009.
4. Namazov Q.M. Funksiyalar və qrafiklər: Dərs vəsaiti. Bakı: BBU-nun nəşriyyatı.

Г. Намазов

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

РЕЗЮМЕ

В статье, в основном анализируется геометрическое и экономическое применение определенного интеграла. Здесь одновременно отмечается, что при решении экономических задач математическим способом необходимо определить единицу измерения. В статье также показано, что в зависимости от условий, поставленной задач для внедрения определенного интеграла необходима наглядность.

G.M. Namazov

GEOMETRIC AND ECONOMIC APPLICATION OF THE DEFINED INTEGRAL

SUMMARY

The article mainly analyzes the geometric and economic application of a definite integral. It is simultaneously noted that when solving economic problems by a mathematical method, it is necessary to determine the unit of measurement. The paper also shows that, depending on the conditions, the tasks posed for the implementation of a certain integral, clarity is necessary.

Redaksiyaya daxil olub: 05.02.2018