UOT 37.01

Salatın Sadiq qızı Mərdanova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

MƏKTƏB RİYAZİYYAT KURSUNDA KƏSİLMƏZLİK VƏ FUNKSİYANIN LİMİTİ ANLAYIŞLARININ TƏLİMİ HAQQINDA

Салатын Садиг гызы Марданова
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

ОБ ОБУЧЕНИИ ПОНЯТИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ПРЕДЕЛА ФУНКЦИЙ НА ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Salatin Sadiq Mardanova
State Pedagogical University of Azerbaijan

ON TEACHING PERSISTENCE AND LIMIT OF FUNCTION CONSEPT IN SCHOOL MATHEMATICS COURSE

Xülasə: Bu məqalədə məktəb riyaziyyat kursunda funksiyanın limiti və kəsilməzliyi konsepsiyasının yeri və rolu məhdud şəkildə araşdırıldı. Uyğun misallar üzərində kəsilməzlik və funksiyanın limiti tədqiq edildi.
Açar sözlər: *funksiya, kəsilməzlik, limit, metod, ekvivalent, tərif, riyazi anlayış, diferensial*

Резюме: В статье широко исследуются место и роль понятия о непрерывности и пределе функции на школьном курсе математики. Непрерывность и предел функции рассмотрены по соответствующим вопросам.
Ключевые слова: *функция, непрерывность, предел, метод, эквивалент, похвала, математическое понимание, дифференциал*

Summary: Role and place of persistence and limit of function concept in school mathematics course was widely researched in the article. Persistence and limit of function was researched on proper examples.
Key words: *function, inconvenience, limit, method, equivalent, definition, mathematical understanding, differential*

Hazırkı zamanda məktəb riyaziyyat kursunda riyazi analizin ideyaları və metodlarından geniş istifadə olunur. "Cəbr və analizin başlanğıcı" fənninin təlimində əsas anlayışların formalaşması məsələlərinə, həmçinin müxtəlif məsələlərin həllində onlardan istifadə bacarıqlarına xüsusi diqqət yetirilir. Dərslərdə kəsilməzlik və funksiyanın limiti kimi anlayışların məzmununu açaraq müəllim:

a) Öyrənilən anlayışların şagirdlərin başa düşməsinə necə nail olmaq olar?

b) Yuxarı sinif şagirdlərinə funksional anlayışlardan xüsusilə, kəsilməzlik və funksiyanın limitindən necə düzgün istifadə etməyi öyrətmək olar?

c) Şagirdlərin diqqətinin bu anlayışların ideya nəzəri tərəfinə necə istiqamətləndirilməsi məqsədə uyğun olar?

ç) Funksional anlayışların tətbiqi xarakterini necə göstərmək olar?

Kəsilməzlik və funksiya limitinin öyrənilməsinin göstərilən metodik xüsusiyyətləri ilə əlaqədar olaraq müəllimin ilk növbədə bu anlayışların müxtəlif təriflərinin müqayisə edilməsinə müraciət etməsi faydalı olar. Bunun üçün riyazi analizin müasir ali məktəb kurslarında kəsilməzlik və funksiyanın limiti anlayışlarına müxtəlif yanaşmaların olduğunu xatırlatmaq yerinə düşər. Onların əksəriyyətində belə xətt gözlənilir: ilk növbədə funksiya limitinin nöqtədə tərifi ifadə olunur və sonra bunun əsasında funksiyanın kəsilməzliyi anlayışına tərif verilir. Bundan başqa müxtəlif ekvivalent təriflərdən istifadə olunur. Məsələn, nöqtədə funksiyanın kəsilməzliyinə " $\varepsilon - \delta$ " dilində Koşi mənada, Heyne mənada, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ bərabərliyinin tətbiqi ilə, filtr anlayışı əsasında arqument artımı vasitəsilə, parçada funksiyanın rəqs etməsi vasitəsilə tərif verilə bilər; nəhayət, bəzi analiz kurslarında funksiyanın kəsilməzliyinin tərifi mücərrəd topoloji fəza anlayışı baxımından əvvəlki təriflərin ümumiləşməsi kimi də verilir. Nöqtədə funksiyanın limitinə tərif verildikdə də analoji situasiya müşahidə olunur.

Müəllimin vəzifəsi onların elmi şərhinin səviyyəsini azaltmadan bu anlayışların məzmununun anlaşılan şəkildə şagirdlərin şüuruna necə çatdırılmasından ibarətdir. X-XI siniflərdə kəsilməzlik və funksiyanın limiti anlayışlarının hansı planda və hansı elmi səviyyədə daxil edilməsi məqsədəuyğundur? Bu suallar xüsusi öyrənilmə mövzusudur.

Bilavasitə şagirdlərlə işlədikdə belə vəziyyəti nəzərə almaq faydalıdır ki, tarixən kəsilməzlik və funksiyanın limiti anlayışları paralel şəkildə formalaşmışdır. Müasir metodik tədqiqatlar isə bu məsələyə deyil, həmin anlayışların hansından (limitdən yoxsa kəsilməzlikdən) başlamağın daha yaxşı olduğuna üstünlük verirlər. Biz burada həmin anlayışların öyrənilməsinə nöqtədə funksiyanın kəsilməzliyindən başlamağı mümkün hesab edirik. Belə yanaşmanın şagirdlər üçün daha təbii olduğu özünü doğrultmuşdur: o, əldə olunmuş biliklərə, təbiətdə, həyatda və texnikada kəsilməz və kəsilən hadisə və proseslərə aid konkret misallara əsaslanır. Belə misallar doqquzillik məktəb kursunda kifayət qədərdir. Ona görə də burada daha formal təriflərin qavranılması üçün yaxşı əsas vardır. Riyaziyyatın digər anlayışları kimi, kəsilməzliyin və funksiya limitinin öyrənilməsi vahid metodiki və riyazi əsaslar üzərində qurulur. Belə metodik əsasları müəyyən edən kəsilməzlik və funksiyanın limiti anlayışlarının müvəffəqiyyətlə formalaşmasının zəruri tələblərini təşkil edən şərtlərə, fikrimizcə aşağıdakılar aiddir: Doqquzillik məktəbdə hazırlıq işləri aparılmasının zəruriliyi (təlimin varislik prinsipindən alınır); Məktəb riyaziyyatının nəzəri kursunun qurulması üçün elmi bazanın müəyyən edilməsi (təlimin anlaşıqlı olması prinsipindən alınır); Materialın şərhinin anlaşılan formalarının işlənilməsi (anlayışlara və nəzəriyyəyə şüurlu yiyələnmə məqsədilə) Aşağıda "Cəbr və analizin başlanğıcı" fənninin "Kəsilməzlik və funksiyanın limiti" kimi mühüm bir bölməsinin nümunəsində göstərilən müddəaların qısa izahını göstərək.

Təlimin ilkin mərhələsində cismin "fiziki" yerdəyişməsi, vaxtın ötməsi, maddənin temperaturunun dəyişməsi və i.a. proseslərində kəsilməzliyə aid müxtəlif misallar ola bilər. Burada şagirdlərin təcrübəsi və intuitiv təsəvvürlərindən geniş istifadə edilməsi imkanı vardır. Belə misallar tədris vəsaitlərində kifayət qədərdir, onları axtarmaq və seçmək üçün xüsusi iş aparmaq lazım deyildir. Onlara başqa nöqteyi-nəzərdən kəsilməzlik ideyasına tətbiqi baxımından yanaşmaq lazımdır. Onda qarşıya qoyulan məqsəd əldə olunacaqdır. Beləliklə, çalışmalar sisteminin məqsədyönlü olması, çalışmaların öz yerinə və vəzifəsinə görə istifadə olunması haqqında ideyaya gəlirik.

IX sinfin riyaziyyat kursunda aparılan hazırlıq işləri əsasında limit və kəsilməzlik anlayışlarının öyrənilməsinin aşağıdakı sxemini gözləmək olar:

I. Əvvəlcə " $\varepsilon - \delta$" dilində funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyinin tərifi daxil edilir: "Əgər istənilən müsbət ε ədədi üçün elə müsbət δ ədədi tapılarsa ki, $|x - x_0| < \delta$ bərabərsizliyi ödənilərsə, f funksiyasına x_0 nöqtəsində kəsilməz funksiya deyilir". Şagirdlər məntiqin və çoxluqlar nəzəriyyəsinin əsas terminləri ilə tanış olarsa (dərnək və fakültativ məşğələlərdə), onda bu tərif aşağıdakı şəkildə yazıla bilər: $\forall\varepsilon > 0$ *üçün* $\exists\delta > 0$ $(|x - x_0| < \delta \ni |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

II. Verilmiş tərifin möhkəmləndirilməsinə aid uyğun misallar nəzərdən keçirildikdən sonra nöqtədə funksiya limitinin tərifi ifadə edilir:

"Əgər" funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməzdirsə, onda x→ x_0 olduqda, A ədədinə f(x) funksiyasının limiti deyilir. "Tərifin şərti yazılışı $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ kimidir.

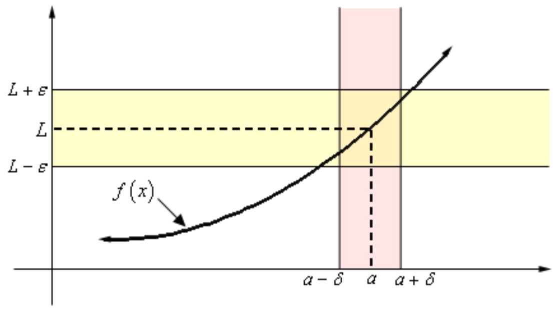
III. Funksiyanın kəsilməzliyinə funksiyanın artımı anlayışı vasitəsilə tərif vermək daha faydalıdır (xüsusən, törəmə törəmə anlayışının daxil edilməsində): "Əgər $\Delta x \to 0$ olduqda funksiyanın artımı sıfıra yaxınlaşarsa, f funksiyasına x_0 nöqtəsində kəsilməyən funksiya deyilir, yəni $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$ olur, burada $\Delta f = f(x) - f(x_0\ )$, $\Delta x = x - x_0$ və $\Delta x \to 0$". Burada qeyd edək ki, tədris təcrübəsində funksiyanın "$\varepsilon - \delta$" dilində kəsilməzliyinin daxil edilməsindən əvvəl onun şərhini nəzərdən keçirmək lazımdır: "Arqumentin böyük olmayan dəyişməsinə funksiyanın kiçik dəyişməsi uyğun gəlir".

IV. Nəhayət aydınlaşdırmaq lazımdır ki, konkret misalların həlli üçün funksiyanın kəsilməzliyini aşağıdakı kimi ifadə etmək əlverişlidir:

"Əgər: 1) funksiya nöqtənin özündə və onun müəyyən ətrafında təyin olunmuşdursa, 2) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ limiti var və onun qiyməti $f(x_0)$-a bərabər olarsa, f funksiyasına x=x_0 nöqtəsində kəsilməz funksiya deyilir".

Bütün bu təriflərin qarşılıqlı əlaqələri uyğun şəkillər üzərində aydınlaşdırılır. Müəllim imkan daxilində aşağıdakı anlayışların müxtəlif tətbiq sahələrini şagirdlərə aydınlaşdırmalıdır: "funksiyanın kəsilmə nöqtələrinin təsnifatı", "funksiyanın kəsilməzliyinin isbatı", "kəsilməzlik və diferensiallama arasında əlaqə", "təqribi hesablamalar", "parçada və müəyyən çoxluqda kəsilməz funksiyanın tərifi və xassələri", "kəsilməz funksiyanın xassələrinin tədqiqi və onların tətbiqi (çoxhədlilərin və digər funksiyaların köklərinin hesablanması, ekstremal qiymətlərin tapılması və s. üçün)

Həmişə olduğu kimi, kəsilməzliyin və funksiya limitinin tərifini qrafik nümayiş etdirmək faydalıdır. Funksiya tərifinin "$\varepsilon - \delta$" dilində illüstrasiyasına aid bir mühüm mülahizəni qeyd edək. Tərifin başa düşülməsində ciddi çətinlik tərifdə ifadə edilən " istənilə ε *üçün uyğun* δ " – nın şəkildə axtarılması təşkil edir. Ancaq bu çətinlik sünidir və ona görə baş verir ki, xüsusi olaraq elə δ seçmək lazım gəlir ki, x_0 nöqtəsi $[-\delta; +\delta]$ parçasının orta nöqtəsi olsun (şəkil 1.). Lakin, müəyyən funksiyanın qrafiki üzərində təsadüfi seçilən nöqtə üçün x_0 nöqtəsindən bərabər məsafədə parçalar alınmır (şəkil 2).



Kifayət qədər incə bu vəziyyətdən çıxış yolu aşağıdakı kimidir: f(x_0) nöqtəsinin ε ətrafı seçilir və daha sonra δ ətrafını elə götürmək lazımdır ki,

$\delta' = min\{x_0 - \delta; x_0 + \delta\}$ olsun.

Onda ε ətraf azalacaq və " I x-x_0 I < δ' bərabərsizliyindən bütün x-lər üçün $|f(x) - f(x_0\ )| < \varepsilon$ bərabərsizliyi alınır" ifadəsi ilə tam uyğunluq alırıq.

Funksiyanın kəsilməzliyi anlayışının formalaşması məsələsinə uğurla cavab verən, anlayışın mahiyyətini qeyd edən və onun tətbiqini göstərən bir neçə misalı nəzərdən keçirək.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{|x-1|}, & x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$

olduqda funksiyanın qrafikini qurun. X-ın elə qiyməti varmı ki, f(x) = - 0.5 olsun? Kəsilmə nöqtəsində bu funksiyanın qiymətini göstərin.

2. Kəsilməzliyin və nöqtədə funksiya limitinin tərifləri nə ilə fərqlənirlər? Funksiyanın nöqtədə (parçada) kəsilməzliyi anlayışından harada istifadə olunur?

3. Funksiyaları

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$; b) f(x)=$\frac{x-1}{x-1}$;

c) f(x)=$\frac{1}{(x+2)^2}$;

Hansı nöqtələrdə kəsilirlər? Bu funksiyaların qrafiklərini qurun. Kəsilmə nöqtəsi ətrafında bu funksiyaların özünü aparmasındakı fərqi aydınlaşdırın.

4. f funksiyası

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x < 0 \ olduqda, \\ x, & 0 \le x < 1 \ olduqda, \\ -x^2+4x-2, & 1 \le x < 3 \ olduqda, \\ 4-x, & x \ge 3 \ olduqda \end{cases}$$

kimi təyin olunmuşdur. Bu funksiya kəsilməzdirmi?

5. Parçada kəsilməz funksiyanın xassələrindən istifadə edərək x^5-3x=1 tənliyinin 1 və 2 ədədləri arasında yerləşən heç olmasa 1 kökü olduğunu göstərin.

Problemin aktuallığı və elmi yeniliyi: Formal məntiq elementlərinin tətbiqi təcrübəsi onların səmərəli olduğunu (məsələn, tərifin inkarının qurulmasında) göstərir, kəsilməz və kəsilən funksiyaları düzgün fərqləndirməyə, yeni təriflərin düzgün qurulmasına kömək edir. Belə növ çalışmalar bir də ona görə faydalıdır ki, burada təlimin mühüm faktorları (konkretləşdirmə və ümumiləşdirmə) aydın şəkildə özünü göstərir.

Problemin praktik əhəmiyyəti: Funksiyanın kəsilməzliyinin şüurlu qavranılması üçün V-IX siniflərin riyaziyyat dərsliklərində, həmçinin, digər əlaqəli fənlərin dərs vəsaitlərində hazırlıq çalışmaları kifayət saydadır. Bu fizikada, kimya və digər fənlərdə kəsilməz və kəsilən proseslərə aid nümunələrdir ki, son nəticədə onları riyazi şəkildə, yəni funksiyalar və onların qrafikləri şəklində təsvir etmək olar. Məsələn, xətti və kvadratik funksiyalar.

Ədəbiyyat

1. Qəhrəmanova N., Kərimov M., Hüseynov İ. Riyaziyyat: X siniflər üçün dərslik. Bakı: Radius, 2017.
2. Mərdanov M.C., Yaqubov M., Mirzəyev S., İbrahimov A., Hüseynov İ., Kərimov M. 10 və 11-ci siniflər üçün dərslik. Bakı, 2009.
3. Həmidov S.S. “Cəbr və analizin başlanğıcı" kursunun tədrisi metodikasına dair. Bakı, 1989.
4. Башмаков А.V. Алгебра и начала анализа. М., 1993.

E-mail: elmi.hisse.08@mail.ru

Rəyçilər: *ped.ü.elm.dok., prof.* **A.S. Adıgözəlov,** *ped.ü.fəls.dok.,dos.* **A.Q. Cəfərov**

Redaksiyaya daxil olub: 19.03.2018