*UOT 37.01*

***Fəxrəddin Feyzullah oğlu Əliyev***
***Mehman Nəbi oğlu Sadiqov***
***Xalidə Sidqəli qız Həsənova***
*Sumqayıt Dövlət Universitetinin dosentləri*

# BÖLÜNMƏ ƏLAMƏTLƏRİNƏ DAİR MÜXTƏLİF TİP MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİ YOLLARI

***Фахреддин Фейзуллах оглы Алиев***
***Мехман Наби оглы Садиков***
***Халида Сидгали гызы Гасанова***
*доценты Сумгаитского Государственного Университета*

# РЕШЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ЗАДАЧ ПО СВОЙСТВУ ДЕЛИМОСТИ

***Fakhraddin Feyzullkh Aliyev***
***Mehman Nabi Sadikov***
***Khalida Sidgali Hasanova***
*Associates Professor of Sumgait State University*

# DECISION OF VARIOUS TYPES OF PROBLEMS ON THE PROPERTY OF DIVIDITY

**Xülasə:** Məqalədə orta məktəblərdə keçirilən 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,13 və s. bölünmə əlamətlərinə baxılır. Qeyd olunduğu kimi məktəb riyaziyyat kursunda sadə bölünənlərin misallarina baxılır . Burada ən çox bu suallara diqqət yetirilir. Bu səbəbdən xüsusi misallar seçilmişdi, onlar bir neçə həllərin koməkliyi ilə həll olunmuşdular. Misallarin həlli zamanı standart və standart olmayan metodlardan da istifadə edilmişdi

***Açar sözlər:*** *natural ədəd, tam ədəd, bölünmə əlamətləri, riyazi induksiya, riyazi metod, qalıqlı bölmə, rasional, misal, isbat*

**Резюме:** В статье рассматриваются деление 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,13 и т. д. преподаваемые в средней школе. Здесь было отмечено, что рассматриваются простые примеры использования меток деления в школьном математическом курсе, который не полностью поддерживает изучение учащимися. В этой статье основное внимание уделяется этим вопросам. Для этой цели были выбраны конкретные примеры, они были решены одним или несколькими способами. В ходе решения использовались особенно сложные стандартные и нестандартные методы и предпосылки. Здесь также основана, что методология решения проблем различными рациональными способами может сыграть определенную роль в углублении математических знаний учащихся.

***Ключевые слова:*** *натуральное число, целое число, признаки делимости, математическая индукция, математический метод, деление с остатком, рациональный, задание, доказательство*

**Summary:** The article deals with the division of 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, etc. taught in secondary school. It was noted here that simple examples of the use of division marks in a school mathematics course that does not fully support the study of students are considered. This article focuses on these issues. For this purpose, specific examples were chosen, they were solved in one or several ways. In the course of the solution, particularly complex standard and non-standard methods and prerequisites were used. It is also based here that the methodology of solving problems by various rational methods can play a certain role in deepening the mathematical knowledge of students.

***Key words:*** *Natural number, complete (whole) number, signs of (the) being divided into, mathematical induction, mathematical method, remainder division, rational example, proof*

Orta məktəb riyaziyyat kursunda 2-yə, 3-ə, 4-ə, 5-ə, 6-ya, 7-yə, 8-ə, 9-a, 10-a, 11-ə, 13-ə və s. bölünmə əlamətləri və onlara aid müxtəlif tip məsələ və misallar verilmişdir. Bütün bu bilgilər daha mürəkkəb riyazi fikirləri söyləməyə kömək edir və nisbətən çətin bölünmə əlamətlərinə aid çalışmaların həllində yardımçı rol oynayır.

Məqalədə qeyd olunan riyazi biliklər, müxtəlif riyazi metod və priyomlardan istifadə etməklə qismən çətin riyazi sualları cavablandıracağıq. Beləliklə, aşağıdakı məsələləri həll edək.

**Misal 1.** İsbat edək ki, $\forall n \in N$ üçün $7^n + 3n - 1$ şəklində verilmiş istənilən ədəd 9-a qalıqsız bölünür.

**İsbatın axtarışı:** Əgər əksini fərz etmiş olsaydıq, yəni verilən ədədin 9-a bölünmədiyini fərz etsəydik, $n$-in 1, 2, 3 və s. qiymətləri üçün verilən təklifin doğru olduğunu görərdik:

$n = 1$ olarsa, $7^1 + 3 \cdot 1 - 1 = 9 \vdots 9$

$n = 2$ olarsa, $7^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 49 + 5 = 54, \; 54 \vdots 9$

$n = 3$ olarsa, $7^3 + 3 \cdot 3 - 1 = 343 + 8 = 351, \; 351 \vdots 9$

və s.

Məsələni iki üsulla həll edək.

**I ü s u l.** Əvvəlcə məsələni riyazi induksiya metodu ilə isbat edək:

1) $n = 1$ üçün $7^n + 3n - 1 \vdots 9$

2) ) $n = k$ üçün $7^k + 3k - 1$ cəminin 9-a bölündüyünü fərz edək və

3) $n = k + 1$ üçün $7^{k+1} + 1 + 3(k + 1) - 1$ ifadəsinin 9-a bölündüyünü isbat edək.

$$7^{k+1} + 1 + 3(k+1) - 1 = 7 \cdot 7^k + 3k + 2 = 7 \cdot 7^k + 7 \cdot 3k - 7 - 7 \cdot 3k + 7 + 3k + 2 =$$

$$= 7(7^k + 3k - 1) - 18k + 9$$

Göründüyü kimi bərabərliyin sağ tərəfi 9-a bölünür, buradan çıxır ki, onun sol tərəfi - $7^{k+1} + 1 + 3(k + 1) - 1$ cəmi də 9-a bölünər. Bütün bunlar $\forall n \in N$ üçün $7^k + 3k - 1$ cəminin 9-a bölündüyünü göstərir.

**II ü s u l.** İndi isə 7 ədədini iki ədədin cəmi və ya fərqi şəklində göstərməklə verilən cəmi qruplaşdıraraq, məqsədyönlü şəkildə aşağıdakı kimi çevrilmələr aparaq:

Aydındır ki, 7-ni

$3 + 4, \; 2 + 5, \; 9 - 2, \; 10 - 3, \; 6 + 1$ kimi göstərə bilərik. Burada 7-ni verilən misal üçün $7 = 6 + 1$ şəklində yazsaq, aşağıdakını alarıq:

$$(6+1)^n + 3n - 1 = 6^n + C_n^1 \cdot 6^{n-1} + C_n^2 \cdot 6^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot 6 + C_n^n + 3n - 1 =$$
$$(6^n + C_n^1 \cdot 6^{n-1} + C_n^2 \cdot 6^{n-2} + \cdots + C_n^{n-2} \cdot 6^2) + C_n^{n-1} \cdot 6 + C_n^n + 3n - 1 = (2^n \cdot 3^n +$$
$$C_n^1 \cdot 2^{n-1} \cdot 3^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2} \cdot 2^2 \cdot 3^2) + 6n + 1 + 3n - 1 = (2^n \cdot 3^n + C_n^1 \cdot 2^{n-1} \cdot 3^{n-1} + \cdots +$$
$$+ C_n^{n-2} \cdot 2^2 \cdot 3^2) + 9n$$

Göründüyü kimi bərabərliyin sağ tərəfindəki hər iki toplanan 9-a bölünür. Buradan çıxır ki, $\forall n \in N$ üçün $7^n + 3n - 1$ ədədi də 9-a tam bölünür.

Başqa bir məsələyə baxaq.

**Məsələ 2.** Elə ən kiçik natural ədəd tapın ki, 3-ə və 14-ə böldükdə qalıqda müvafiq olaraq 1 və 9 alınsın.

Həllin axtarışına başlayaq.

İlk olaraq belə bir suala cavab axtaraq: verilmiş $N$ ədədini $d$-yə böldükdə qalıqda $r$ alınması nə zaman baş verir? Fərz edək ki, $N$ ədədini $d$ -yə böldükdə qismət $q$ və qalıq $r$ $(r < d)$ alınır. Onda qalıqlı bölmənin tərifinə görə $N = dq + r$ olar. Məsələn, 43-ü 8-ə bölsək, qismətdə 5 və qalıqda 3 alarıq, yəni $43 = 8 \cdot 5 + 3$. İndi təbii olaraq $N = dq + r$ qəbul edək və məsələnin birbaşa həllinə keçək. Şərtə görə axtarılan ədəd $x$ ədədi olsa, aydındır ki, $x = 3y + 1$ (1) və $x = 14z + 9; \; y, z \in N$ şərtləri eyni zamanda ödənməlidir və $x$ bu şərtləri ödəyən ən kiçik ədəd olmalıdır. Ona görə də $3y + 1 = 14z + 9$ qəbul edərək buradan $3y = 14z + 8$ və ya $y = \frac{14z+8}{3} = 4z + 2 + \frac{2z+2}{3}$ (2) alarıq. Bundan başqa, sonuncu ifadədəki $\frac{2z+2}{3}$ ədədi tam ədəd olmalıdır. Həmin ədədi $\frac{2z+2}{3} = u$ ilə işarə etsək, buradan $y = 4z + 2 + u$,

$2z = 3u - 2, \; z = u - 1 + \frac{u}{2}$ (3) alınar. $y, u \in N$ olduğundan buradan çıxır ki, $\frac{u}{2}$ ədədi də tam ədəd olmalıdır. Bu ədədi $t = \frac{u}{2}$ ilə işarə edək. Bu əvəzləməni (3) - də nəzərə alsaq, $z = u - 1 + t = 2t - 1 + t = 3t - 1$ olar. $z$-in bu ifadəsini (1) və (2) bərabərliklərində yerinə yazsaq, onda

$$y = 4z + 2 + \frac{2z+2}{3} = 4(3t-1) + 2 + u = 4(3t-1) + 2 + 2t = 14t - 2$$

$$x = 3y + 1 = 3(14t - 2) + 1 = 42t - 5 \quad (4)$$

olar. Bu sonuncu ifadədə $t$-nin $1$ -ə bərabər ən kiçik qiymətini götürsək, bu halda onda $x = 42 \cdot 1 - 5 = 37$ alarıq. Deməli, axtarılan ədəd 37-dir.

**Məsələ 3.** Elə ən kiçik natural ədəd tapmalı ki, həmin ədədi 2, 3, 4, 5 və 6-ya böldükdə qalıqda müvafiq olaraq 1, 2, 3, 4 və 5 alınsın.

**H ə l l i.** Bu tip məsələlərə orta məktəb riyaziyyat kursunda çox az rast gəlinir və adətən şagird və abituriyentlər onların həllində çətinlik çəkirlər.

Belə məsələlərin daha çətin şərtlərlə verilən halları da var. Məsələn, elə ən kiçik ədəd tapın ki, 3-ə, 14-ə və 25-ə böldükdə qalıqda 1, 9 və 14 alınsın. Bu iki məsələni müqayisə etsək görərik ki, ikinci məsələnin həlli bir qədər çətindir. Lakin təklif edilən məsələdə şərtdən göründüyü kimi bölmə zamanı bölənlərlə qalıqlar arasında sadə qanunauyğunluq vardır, belə ki, hər dəfə qalıq böləndən 1 vahid kiçikdir. Bu şərtdən istifadə edərək məsələni həll edək.

Məlumdur ki, əgər $n$ ədədi $d$-yə bölünürsə, onda $n - 1$ ədədini $d$-yə böldükdə qalıq $d - 1$ olar. Bunu misalla aydınlaşdıraq. $n = 80$ ədədi 20-yə bölünür. $80 - 1 = 79$ ədədini 20-yə bölsək, burada $79: 20 = 3 \cdot 20 + 19, q = 19$ olar, yəni qalıq $20 - 1$ olar. Başqa sözlə, bu halda qalıq böləndən 1 vahid kiçik olur.

İndi isə bunları əsas götürərək verilən məsələnin həllini araşdıraq.

2, 3, 4, 5 və 6-ya bölünən ən kiçik ədəd $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ olduğundan, $60 - 1 = 59$ ədədini 2, 3, 4, 5 və 6-ya bölsək, qalıqda yuxarıdakı araşdırmaya uyğun olaraq $1, 2, 3, 4$ və 5 alarıq.

Ədədlərin bölünmə əlamətlərindən istifadə edərək bəzən müəyyən rasional şəkildə verilmiş kəsrlərin $\forall n \in N$ üçün tam və ya kəsr ədəd olduğunu göstərmək tələb olunur.

**Misal 3.** Məsələn, $\forall n \in N$ üçün $\frac{3n+4}{4n+5}$ kəsrinin ixtisar olunmayan olduğunu göstərmək lazımdır.

Bu faktın birbaşa isbatı, yəni verilmiş kəsrin hər hansı hərfi ifadəyə bölündüyünü göstərmək mümkün deyil. Bu səbəbdən əksini fərz edək, yəni fərz edək ki, $\frac{3n+4}{4n+5}$ kəsri ixtisar olunandır.

Deməli, bu zaman elə $n \in N$ varlığından söhbət getməlidir ki, Deməli, bu zaman elə ədədinin $n$ ədədinin varlığından söhbət getməlidir ki, $n$-in həmin qiymətində verilmiş kəsrin surət və məxrəci müəyyən bir $d$ ədədinə bölünür və bu zaman $d \neq 0, d \neq 1$ və $d \neq -1$ şərtləri ödənməlidir. $\frac{3n+4}{4n+5}$ kəsrinin $d$-yə ixtisar oluna bildiyini qəbul etdiyimizdən, deyə bilərik ki, kəsrin həm surəti - $(3n + 4)$, həm də məxrəci - $(4n + 5)$ $d$-yə bölünür. Yəni, $3n + 4 = md$, $4n + 5 = m_1 d$ olar, burada $m$ və $m_1$ tam ədədlərdir. Buradan alırıq ki, $n = \frac{md-4}{3}$ və

$$n = \frac{m_1 d - 5}{4}. \quad \text{Deməli,} \quad \frac{md-4}{3} = \frac{m_1 d - 5}{4},$$

$4md - 3m_1 d = 1$ olar. Nəhayət, sonuncudan $4m - 3m_1 = \frac{1}{d}$ alarıq. Göründüyü kimi bu bərabərliyin sol tərəfi tam ədəd və sağ tərəfi isə kəsr ədəddir. Deməli, fərziyyəmiz doğru deyildir. Bu isə $\frac{3n+4}{4n+5}$ kəsrinin $\forall n \in N$ üçün ixtisar olunmayan olduğunu göstərir.

**Problemin elmi yeniliyi.** Bölünmə əlamətlərinin daha dərindən öyrənilməsi üçün bir çox müxtəlif tip çətinlik dərəcəsi yüksək olan misalların orta məktəb proqramına uyğun, ancaq qismən çətin metod və priyomların tətbiqi ilə həll edilməsi.

**Problemin aktuallığı və praktik əhəmiyyəti.** Məqaldə göstərilən misalların müxtəlif rasional üsullarla həlli metodikası şagirdlərə bölünmə əlamətlərinə aid məsələ və misalların həllərində, eləcə də uyğun isbat məsələlərində yardımçı ola bilər.

## Ədəbiyyat

1. С.И. Туманов. Поиски решения задач. М.: Просвещение, 1969.
2. А.Г. Цыпкин. Справочник по математике. Для средних учебных заведений. М.: Наука, 1984.
3. Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбурд и др**.** Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: Учебн. пособие для 10-11 кл. средн. школы. М.: Просвещение, 1990.

E-mail: abdullayev_ayxan@list.ru

**Rəyçilər:** *dos.* **M.N. Ağayarov,** *dos.* **M.N. Heydərova**

**Redaksiyaya daxil olub:** 14.03.2018