

Kəmalə Fazil qızı Abakarova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

AFİN MƏZMUNLU MƏSƏLƏLƏR VƏ ONLARIN HƏLLİ

Кямаля Фазиль Абакарова
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

ЗАДАЧИ С СОДЕРЖАНИЕМ АФИН И СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Kamala Fazil Abakarova
State Pedagogical University of Azerbaijan

ISSUES WITH AFIN AND WAYS TO SOLVE THEM

Xülasə: Afin məsələləri metrik məsələlərdən fərqləndirmək üçün müəyyən məşq və təcrübə tələb olunur. Afin məzmunlu üç növ məsələ həlli verilir: şərtində vektor verilməyən və onun həllində nöqtələr çoxluğunun vektorla verilməsindən istifadə edilməsi tələb olunmayan məsələlər; isbat və hesablama məsələlərinin həlli üçün düzxətlər və müstəvilərin vektor parametrik şəkildə verilən məsələlər; məzmununa vektorlar daxil edilmiş məsələlər.

Açar sözlər: vektor, bucaq, paralel köçürmə, məsafə

Резюме: Для различения задач с содержанием афин требуется определенная подготовка и практика. С вектором решения задач он достаточно прост, он требует либо высокотехнологичных, либо векторных отношений, а проблемы и результаты просто записываются в векторном формате. В процессе применения векторов к процессу решения проблем ученики должны постепенно понять следующее: расстояние и угол не могут быть рассчитаны с использованием векторного набора, векторных чисел.

Ключевые слова: вектор, угол, параллельный перенос, расстояние

Summary: Certain training and practice is required to distinguish afin issues from metric issues. With the vector application the issue is solved easily, it doesn't require high techniques for dealing with vectors, the condition and result of issue are easily written in vectors form. In the process of applying vectors to the issue solving process, students should gradually adopt the following: the distance and angle can't be calculated with the help of vectors addition, multiplication of vector .

Key words: vector, angle, parallel transfer, distance

Şagirdlərin həndəsə dərslərində vektor haqqında aldığı məlumatları iki hissəyə ayırmaq olar. Birinci hissəyə aşağıdakılar aiddir: vektorun tərif, vektorların toplanması əməli və onun qanunları, vektorların çıxılması, vektorların kollinearlığı və komplanarlığı, vektorun ədədə vurulması əməli və onun qanunları, verilmiş bazisdə vektorun ayrılması, ayrılmanın yeganəliyi.

İkinci hissəyə vektorların skalyar hasili və onun cəbri xassələri aiddir.

Birinci halda göstərilən əməliyyatlar və onların xassələrinin köməyi ilə paralelliyə, paralel parçaların nisbətinin hesablanması, köçürməyə, homotetiya, üç nöqtənin bir düz xəttə, dörd nöqtənin bir müstəviyə aiddiyi nə aid geniş sayda məsələlər həll etmək olar.

İkinci halda məsafələrin, bucaqların, bərabərsizliklərin hesablanmasında, nöqtələr çoxluğunun tapılmasında vektorlar tam müvəffəqiyyətə tətbiq olunur.

Birinci tip məsələlərə afin məsələlər, ikinci tip məsələlərə isə metrik məsələlər deyilir.

Vektorların məsələ həllinə tətbiqi prosesində şagirdlər tədricən aşağıdakıları mənimsəməlidirlər: vektorların toplanması, vektorun ədədə vurulması əməlinin köməyi ilə məsafə və bucaqlar hesablanma bilmir. Ona görə bir qayda olaraq bu əməllər “çevrə”, “tənbölən”, “perpendikulyar” anlayışları iştirak edən məsələlərə tətbiq edilmir. Lakin düz xətt və müstəvilərin paralelliyi, paralel parçalar (konkret olaraq paraleloqram, trapesiya, paralelopiped, prizma parçanın ortası, üçbucağın orta xətti, mərkəzi simmetriya, üçbucağın tetraedrin medianlarının kəsişmə nöqtəsi) haqqında söhbət gedən məsələlər vektorun tətbiqi ilə uğurla həll edilir.

Afin məsələləri metrik məsələlərdən fərqləndirmək üçün müəyyən məşq və təcrübə tələb olunur. Əgər VII sinifdən başlayaraq ,sonra isə IX sinifdə müntəzəm olaraq buna qayıtdıqda (vektorların skalyar hasilinin öyrənilməsindən sonra) şagirdlər artıq X sinifdə məsələnin tipini və onun həlli üçün vektor hesabının hansı qanunlarını tətbiq etmək lazım gəldiyini dəqiq müəyyən edir.

Aşağıda afin məzmunlu üç növ məsələ həllini şərh edək.

Şərtində vektor verilməyən və onun həllində nöqtələr çoxluğunun vektorla verilməsindən istifadə edilməsi tələb olunmayan məsələləri birinci tipə aid edək.

İkinci növə aid edilən isbat və hesablama məsələlərinin həlli üçün düz xətlər və müstəvilərin vektor parametrik şəkildə verilməsini nəzərdən keçirməyi tələb edir.

Üçüncü tip məsələlər onunla fərqlənir ki, onların məzmununa vektorlar daxil edilmişdir. Belə məsələlər məktəb həndəsə tədrisi üçün yenedir, yalnız son zamanlar onlar tədris və metodik ədəbiyyatda öz əksini tapmağa başlamışdır.

1. Vektor verilənləri olmayan məsələlər.

Məsələ 1. Bir müstəviyə aid olmayan dörd A,B,C,D nöqtələri verilmişdir. AB və CD parçaları M və N nöqtələri ilə bərabər nisbətə bölünmüşdür.

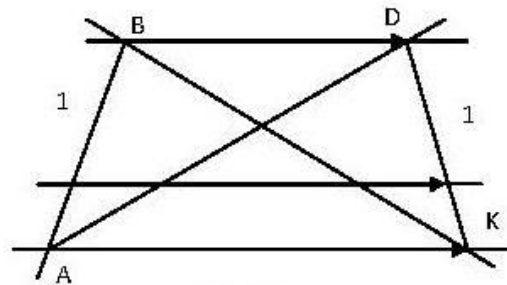
$AM:MB = CN:ND = K$, AC, BD və MN düz xətlərinin müstəviyə paralel olduğunu isbat edin.

Həlli: Məsələnin şərti və nəticəsi afin məzmunludur. Doğrudan da paralel parçaların uzunluqları nisbəti və üç paralel düz xəttin müstəviyə paralelliyi – afin anlayışlardır. Məsələnin şərtini vektor formada yazaq:

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{ND}$$

İsbat etmək lazımdır ki, AC, BD, MN düz xətlərini $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}$ istiqamətləndirici vektorları komplanardır. (şəkil 2). Əgər 0- fəzanın ixtiyari nöqtəsi olarsa, onda

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}), \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OC} = k(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})$$



Şəkil 2

Buradan çıxma ilə

$$\overrightarrow{NM} - \overrightarrow{CA} = k(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{NM}) - \text{alırıq.}$$

Sadələşdirdikdən sonra

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{1+k} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{k}{1+k} \cdot \overrightarrow{DB} - \text{tapırıq.}$$

Bu isə \overrightarrow{NM} vektorunun \overrightarrow{CA} və \overrightarrow{DB} vektorları üzrə ayrılışını göstərir, onda bu üç vektor komplanardır. Ona görə AC, BD, MN düz xətləri müstəviyə paraleldir. Bu məsələni vektor tətbiq etmədən də əlavə qurmaların köməyi ilə həll etmək olardı.

Vektorun tətbiqi ilə məsələ asan həll olunur, o, vektorlarla münasibət üçün yüksək texnika tələb etmir, məsələnin şərti və nəticəsi vektor formada asanlıqla yazılır.

Məsələ 2. Üç paralel a, b, c düz xətlərinin hər biri üzərində uyğun olaraq $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ – üç nöqtə verilmişdir. $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$ üçbucaqlarının medianlarının kəsişmə nöqtələrinin bir düz xətt üzərində yerləşdiyini isbat edin.

Həlli. Bu afin məsələsinin xüsusiyyəti onun “ölçüsüz” olmasında yəni, onun şərtində verilən düz xətlərin bir müstəvi üzərində yerləşmədiyini tələb etmir: bu düz xətlər ixtiyari şəkildə yerləşir, hətta üst-üstə də düşə bilər. Ona görə bu məsələ həm planimetriyanın (VII-IX sinif-

Afin məzmunlu məsələlər və onların həlli

lərdə), həm də stereometriyanın (X-XI siniflərdə) öyrənilməsində həll etmək olar.

Üçbucaqların meridianlarının kəsişmə nöqtələrini $G_1 G_2 G_3$ – ilə işarə edək. (Şəkil 3.)

Məlum olduğu kimi,

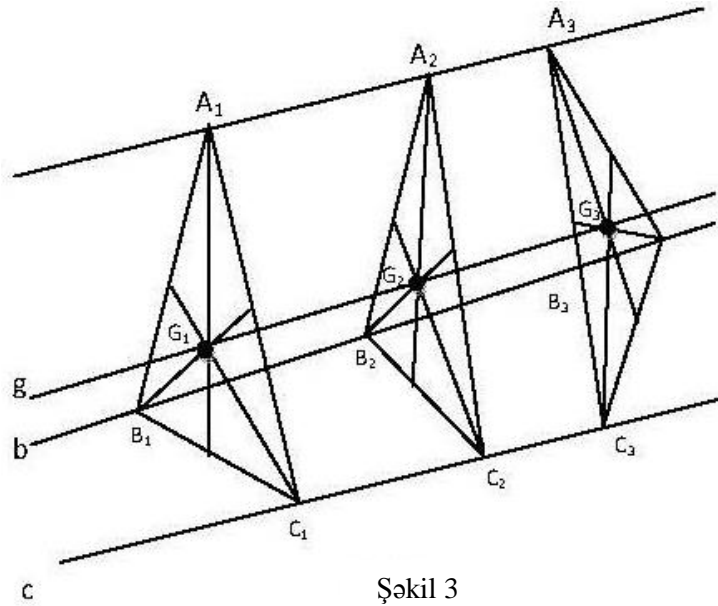
$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}), \quad OG_2 =$$

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2}), \quad OG_3 = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{OC_3})$$

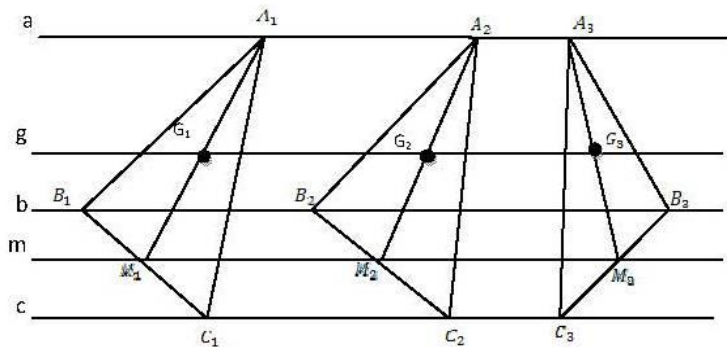
Buradan alırıq ki,

$$G_1 G_2 = OG_2 - OG_1 = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{B_1 B_2} + \overrightarrow{C_1 C_2})$$

$$G_2 G_3 = OG_3 - OG_2 = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_2 A_3} + \overrightarrow{B_2 B_3} + \overrightarrow{C_2 C_3})$$



Şəkil 3



Şəkil 4

Əgər \vec{a} vektoru verilmiş düz xətlərin istiqamətləndirici vektoru olarsa, onda $\overrightarrow{G_1 G_2}$ və $\overrightarrow{G_2 G_3}$ vektorları \vec{a} vektoruna paralel olur. Bu o deməkdir ki, $G_1 G_2$ və $G_2 G_3$ düz xətləri paraleldir. Onların G_2 -ortağ nöqtələri olduğu üçün bu düz xətlər üst-üstə düşür.

Nəzərdən keçirilən məsələni ənənəvi vasitələrlə həll etmək olar. $B_1 C_1, B_2 C_2, B_3 C_3$ - tər-

rəflərinin orta nöqtələrinin b və c düz xətlərinin m orta xəttinə aid olduğunu, G_1, G_2, G_3 nöqtələrinin a və m düz xətlərinə paralel olan g düz xəttinə aid olduğunu $p(a, g):p(g, m) = 2:1$

Burada $p(a, g)$ yazılışı a və g düz xətləri arasında məsafəni göstərir.

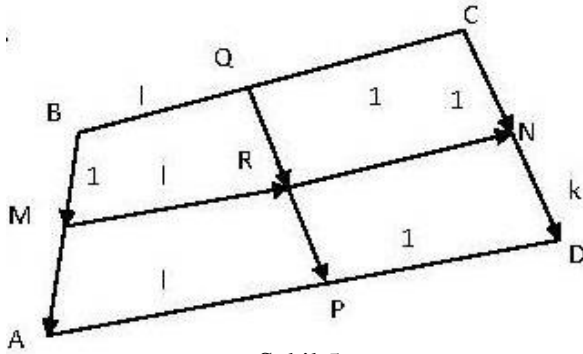
Müəyyən etmək lazımdır: Konstruktiv həll əyanidir, təhsil olunan və başa düşüləndir, nöqtələr çoxluğu i – ilə əməliyyat aparmağa şagird-

ləri istiqamətləndirir. Ona görə də şagirdlərlə bu həll üsulunun seçilməsi tövsiyə oluna bilər.

Ümumiyyətlə, şagirdlərdə riyazi təfəkkürün müxtəlif tərəflərini inkişaf etdirmək üçün şagirdlərin məsələnin məzmunundan asılı olaraq eyni bir məsələnin həllində bu və ya digər yanaşmanın üstünlükləri və çatışmazlıqlarını tutaraq bir neçə həll üsulunun müqayisə olunmasından təcrübədə istifadəsi məqsədəuyğundur.

Məsələ3. A,B,C,D nöqtələri bir müstəviyə aid deyildir. AB və CD parçaları M və N nöqtələri ilə bərabər k nisbətində AD və BC parçaları isə P və Q nöqtələri ilə bərabər l nisbətində bölünmüşdür. M,N,P və Q nöqtələrinin bir müstəviyə aid olduğunu isbat edin.

Həlli. Aydındır ki, məsələ afin xarakterlidir. Onda bir düz xətt üzərində yerləşən parçaların nisbətləri verilir və dörd nöqtənin bir müstəviyə aid olmasını isbat etmək tələb olunur. Məsələ 2-nin həllindən istifadə edək. MN parçasını R nöqtəsi ilə l nisbətində bölək. (Şəkil 5.)



Şəkil 5

$$\overrightarrow{MR} = l\overrightarrow{RN}.$$

$$\text{Onda } \overrightarrow{QR} = \frac{1}{1+l} \cdot \overrightarrow{BM} + \frac{l}{1+l} \cdot \overrightarrow{CN} \text{ olar.}$$

Analoji qayda ilə

$$\overrightarrow{RP} = \frac{1}{1+l} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{l}{1+l} \cdot \overrightarrow{ND} \text{ yazmaq}$$

olar.

Şərtə görə

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BM}$$

$$\text{və } \overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{CN} \text{ olduğundan}$$

$$\overrightarrow{RP} = \frac{1}{1+l} \cdot (k\overrightarrow{BM}) + \frac{l}{1+l} \cdot (k\overrightarrow{CN})$$

$$\text{Və ya } \overrightarrow{RP} = k\overrightarrow{QR} \text{ alarıq.}$$

Problemnin aktuallığı. Beləliklə, \overrightarrow{RP} və \overrightarrow{QR} vektorları kollinear, ona görə də Q,R və P nöqtələri MN düz xəttini R nöqtəsində kəsən müəyyən bir düz xəttə aiddir. Belə olan halda M,N,P və Q nöqtələri bir müstəviyə aiddir.

Problemnin elmi yeniliyi. Afin məzmunlu məsələlər və onların həlli yolları.

Problemnin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Afin məsələləri ilə metrik məsələlərdən fərqləndirməyə kömək edir. Məsələnin tipini və onun həlli üçün vektor hesabının hansı qanunlarını tətbiq etmək lazım gəldiyini dəqiq müəyyən edir. Məqaləni orta məktəb şagirdləri və ali məktəb tələbələri istifadə edə bilər.

Ədəbiyyat

1. Xanəli Paşayev, Maqsud Nəcəfov. Analitik həndəsədən mühazirələr Bakı: Çarşıoğlu, 2002.
2. Mərdanov M.C. və b. Həndəsə: Ümumtəhsil məktəblərinin 9-cu sinfi üçün dərslik. Bakı: Çarşıoğlu, 2004.
3. Həndəsə. 9-10-cu siniflər üçün dərs vəsaiti Bakı: Maarif, 1982.
4. Погорелов A.V. Həndəsə: Orta məktəbin 7 -11-ci sinifləri üçün dərslik. Bakı: Maarif, 1991.
5. Преподавание геометрии в 6-8 классах: Сб статей. / Сост.В.А. Гусев. М.: Просвещение 1979.

E-mail: abakarova_k@mail.ru

Rəyçilər: ped.ü.elm.dok., prof. A.S. Adıgözəlov, ped.ü.fəls.dok., dos. N.B. Nəsirov

Redaksiyaya daxil olub: 01.03.2018