UOT 37.01

Sona Vilayət qızı Əsədova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

MÜƏYYƏN İNTEQRALIN TƏTBİQLƏRİ

Сона Вилаят гызы Асадова
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Sona Vilayat Asadova
State Pedagogical University of Azerbaijan

THE APPLİCATİONS OF DEFİNİTE İNTEGRAL

Xülasə: Məqalədə inteqralın tətbiqi zamanı şagirdlərin qarşılaşdıqları çətinliklərin aradan qaldırılması metodikası işlənmişdir. Belə ki, inteqralın köməyilə fiqurların sahələrinin hesablanmasına kömək etdiyi isbat edilir.
Açar sözlər: *cəbr, həndəsə, sahə, həcm, inteqral*

Резюме: В статье рассматривается методика решение примеров определенных интегралов. Были рассмотрены задачи, в которых можно найти площади фигур или объемы вращающихся тел с помощью интегралов.
Ключевые слова: *алгебра, геометрия, область, объем, интеграл*

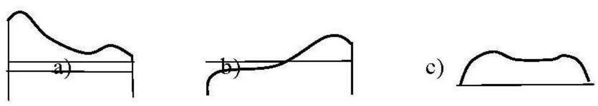
Summary: The solution methods of problems on application of definite integral has been explained in this article. The calculation area of figures, volume of rotation objects have been reviewed on examples withc the help of integral.
Key words: *algebra, geometry, area, volume, integrated*

Müşahidələr göstərir ki, müəyyən inteqralın tətbiqi zamanı şagirdlər müxtəlif çətinliklərlə qarşılaşırlar. İnteqralın tətbiqi XI sinif cəbr və analizin başlanğıcı kursunda sahələrin hesablanması, həndəsə kursunda isə həcmlərin hesablanması zamanı öyrənilir. Bu zaman sahə və həcmlərin xassələri şagirdlər tərəfindən gözlənilməlidir. Sahələrin və həcmlərin həmişə müsbət olması əvvəlcədən qeyd edilməlidir.

İnteqralın köməyi ilə fiqurların sahələrinin hesablanması məsələləri həmişə əyrixətli trapesiyanın sahəsinin hesablanmasına gətirilir. Üç tərəfdən düz xətt və bir tərəfdən əyri ilə hüdudlanmış müstəvi fiqura əyrixətli trapesiya deyilir.

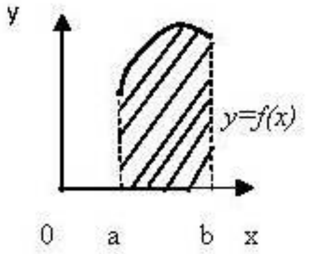
Belə ki, iki düz xətt paralel olmaqla üçüncü düz xəttə perpendikulyar olub, əyri isə paralel düz xətlərin hər birini yalnız bir nöqtədə kəsir.

Ola bilər ki, paralel düz xətlərdən biri, yaxud hər ikisi bir nöqtəyə çevrilsin.



Fərz edək ki, $[a; b]$ parçasında kəsilməz və mənfi olmayan f(x) funksiyası verilmişdir. Əyrixətli trapesiya y= f(x) əyrisi, Ox absis oxu və x=a, x=b düz xətləri ilə ($a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ şərtlərini ödəyən nöqtələr çoxluğu) hüdudlanmışdır.(şəkil 2) Asanlıqla göstərmək olar ki, bu əyrixətli trapesiyanın sahəsi $S=\int_a^b f(x)dx$ düsturu ilə hesablanır.

Aşağıdakı sahələrin hesablanmasına aid olan bəzi misallara baxaq:

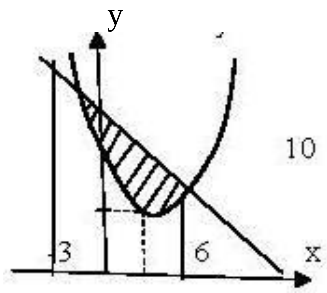


Misal. y=$\frac{1}{3}x^2$- 2x +4 və y= 10-x xətləri ilə hüdudlanmış sahəni hesablayın.

Həlli. y=$\frac{1}{3}x^2$ – 2x +4 parabola əyrisidir. Parabolanın təpə nöqtələrinin koordinatlarını tapaq.

$y' = \frac{2}{3}x - 2$; $x_0=3$; $y_0=\frac{1}{3}9 - 6 + 4 = 1$

Təpə nöqtəsi A(3;1) nöqtəsidir. Bu parabola absis oxunu kəsmir. Çünki D<0-dır. Ordinat oxunu (0;4) nöqtəsində kəsir. Y=10-x, x+y=10 və ya $\frac{x}{10}+\frac{y}{10}=1$ düz xəttin parçalarla tənliyidir. Absis və ordinat oxlarından 10 vahid parça ayıran düz xətdir. Bu əyrilərin kəsişmə nöqtəsini tapırıq:



$\frac{1}{3}x^2$- 2x +4 = 10-x

$x_1=3$; $x_2=6$ alırıq. Onda -3 6 x

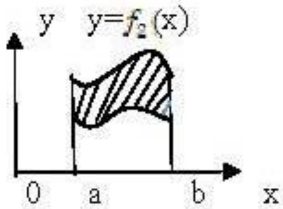
S=$\int_{-3}^{6}(10 - x - \frac{1}{3}x^2+2x-4)dx$=

$\int_{-3}^{6}(6+x-\frac{1}{3}x^2)dx = (6x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{9})\Big|_{-3}^{6} = 40{,}5$.

Tutaq ki, müstəvi fiqur x=a, x=b (a<b) düz xətləri və $[a;b]$ parçasında $0\le f_1(x)\le f_2(x)$ şərtlərini ödəyən kəsilməz $f_1(x)$, $f_2(x)$ funksiyalarının qrafikləri ilə hüdudlanıb. Belə fiqurun sahəsi

S= $\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$ y y=$f_2(x)$

düsturu ilə hesablanır. Y=$f_1(x)$



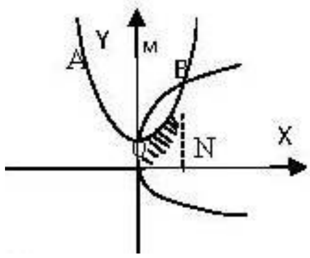
Misal. y^2=2px, x^2=2py parabolaları ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini hesablayın.

Həlli. Axtarılan sahə OAMN və OBMN əyrixətli üçbucaqlarının sahələri fərqidir. OAM əyrisi üzrə y=$\sqrt{2px}$, OBM əyrisi üzrə y=$\frac{x^2}{2p}$ olduğunu nəzərə alaraq parabolaların kəsişmə absisini tapaq:

$\frac{x^4}{4p^2}$ = 2px

$x^4 - 8p^3x = 0$ A

x($x^3 - 8P^3$)=0 0 N



Buradan, x=0 (O nöqtəsinə uyğundur) və $x^3=8p^3$ və ya x=2p alınır. Bu isə M nöqtəsinin absisidir. Deməli

S= $S_{OAMN} - S_{OBMN} = \int_0^{2p}\sqrt{2px}\,dx - \int_0^{2p}\frac{x^2}{2p}dx =$

=

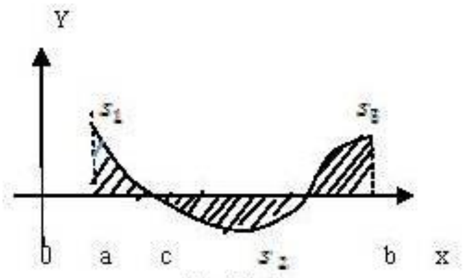
$\sqrt{2p}\int_0^{2p}\sqrt{x}\,dx - \frac{1}{2p}\int_0^{2p}x^2dx = \sqrt{2p}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2p} =$

$=\frac{2}{3}(2p)^2 - \frac{1}{3}(2p)^2 = \frac{4}{3}p^2$.

$[a;b]$ parçasında kəsilməz f(x) funksiyasının bu parçada işarəsi dəyişəndirsə, uyğun fiqurun sahəsi S= $\int_a^b f(x)dx$ və ya

S= $S_1 - S_2 + S_3$ düsturu ilə hesablanır.

$\left(S_1=\int_a^c f(x)dx,\ S_2=\int_c^d f(x)dx,\ S_3=\int_d^b f(x)dx\right)$

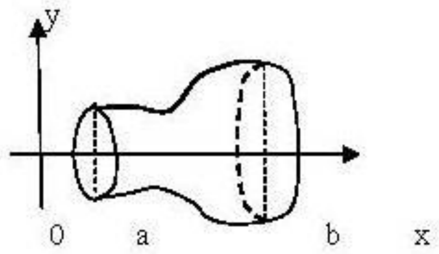


Fırlanma cisimlərinin həcmi. Y=f (x)

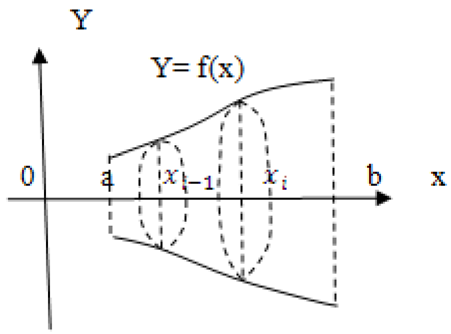
İndi isə müəyyən inteqralı fırlanma cisimlərinin həcminin hesablanmasına tətbiq edək.

Verilmiş $[a; b]$ (a<b) parçasında kəsilməz, mənfi olmayan y=f(x) funksiyasının qrafiki, Ox absis oxu və x=a, x=b düz xətləri ilə hüdudlanmış əyrixətli trapesiyanın Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cisim fırlanma cismi adlanır. Belə cismin həcmi

V= $\pi \int_a^b f^2\,(x)dx$ düsturu ilə hesablanır.



İsbatı. Tutaq ki, əyrixətli trapesiyanın Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun həcmini tapmaq tələb olunur. $[a; b]$ parçasını



a= $x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_n$=b

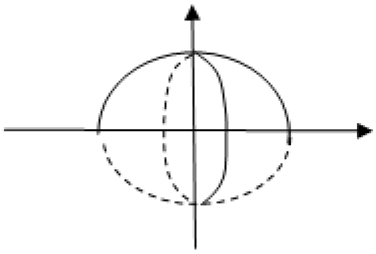
nöqtələri ilə n hissəyə bölək və hər hissədə c_i nöqtəsi götürək. Cismin x_{i-1} və x_i nöqtələrindən keçməklə Ox oxuna perpendikulyar olan müstəvilər arasındakı qalan hissəsinin həcmi əvəzinə təqribi olaraq, hündürlüyü Δx_i radiusu f(c_i) olan silindrin həcmini götürmək olar.

$\Delta V_1 = \pi[f(c_i)]^2 \cdot \Delta x_i \ (i = \overline{1,n})$.

Cismin həcminə bu hissələrin həcmlərinin cəmi kimi baxmaq olar:

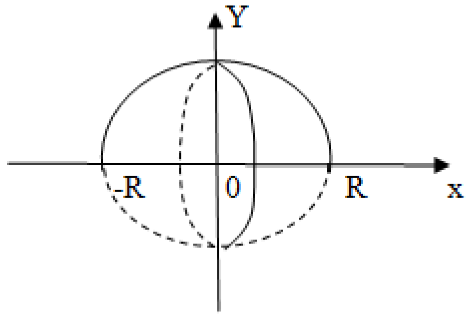
$V_n = \pi \int_a^b f^2\,(x)dx$

Misal. Radiusu R olan kürənin həcmini tapın.



Həlli. $x^2 + y^2 = R^2$ çevrəsinin Ox oxundan yuxarıda qalan hissəsinə uyğun yarımdairənin $\left(y = \sqrt{R^2 - x^2}, -R \le x \le R\right)$ bu ox ətrafında fırlanmasından R radiuslu kürə alınır.

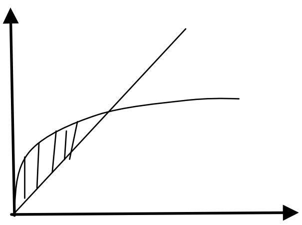
V= $\pi \int_a^b f^2(x)dx$ düsturunun köməyi ilə bu kürənin həcmi üçün alırıq:



V=$\pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx =$
$=$
$\pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}R^3.$

Misal. y=$\sqrt{x}$ və y=x xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun absis oxu ətrafından fırlanmasından alınan cismin həcmini tapın.

Həlli. y=$\sqrt{x}$-dən x=0; x=1 alırıq.



V= $\pi \int_0^1 \left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - x^2\right) dx = \pi \int_0^1 (x - x^2)dx =$
$\pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$

Alarıq. Yəni əyrixətli trapesiya aşağıdan və yuxarıdan $y_1 = f_1(x)$ və $y_2 = f_2(x)$ əyriləri ilə məhduddursa onda fırlanan cismin həcmi

V=π $\int_a^b (y_1^2 - y_2^2)dx =$ π $\int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\, dx.$

olar.

Misal. y=$x^2 + 1$, x=0, x=3, y=0 xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini tapın.

Həlli.

V=π$\int_0^3 y^2dx$ =π$\int_0^3 (x^2 + 1)^2dx =$ π$\int_0^3 (x^4 + 2x^2 + 1)dx$=

=π $\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x\right) \Big|_0^3 =$ π$\left(\frac{243}{5} + 18 + 3\right)$= $\frac{348\pi}{5}$.

$[a; b]$ parçasında kəsilməz $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ $(0 \leq f_1(x) \leq f_2(x))$ funksiyalarının qrafikləri və x=a, x=b düz xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmi

V= π$\int_a^b ({y_2}^2 - {y_1}^2)\, dx$

düsturu ilə hesablanır.

Problemin aktuallığı və praktik əhəmiyyəti. Müşahidələr göstərir ki, məktəb riyaziyyatı tədrisində müəyyən inteqralın tətbiqləri şagirdlər tərəfindən müxtəlif çətinlərlə rastlaşır. Bu nöqteyi nəzərdən müəyyən inteqralın tətbiqlərinin araşdırılması aktuallıq kəsb edir.

Problemin elmi yeniliyi. Məktəbdə cəbr və analizin başlanğıcı kursunun təlimində şagirdin fərdi yanaşma zərurəti meydana çıxır. Bu səbəbdən də materialın əhəmiyyəti mənimsəmə, həm də şərhetmə xarakterinə görə zəruri sayılır

Ədəbiyyat

1. Mərdanov M., Yaqubov M., Mirzəyev S. və b. Cəbr və analizin başlanğıcı: Ümumtəhsil məktəblərinin 11-ci sinfi üçün dərslik. Bakı: Çaşıoğlu, 2014.
2. Nəsibov M.X. Məktəb kursunda riyazi analizin elementləri. Bakı, 1991.
3. Məmmədov Ə. Elementar riyaziyyat. Bakı, 2012.
4. Hacıyev M.Ş. Törəmə və inteqralın orta məktəb riyaziyyat və fizika kursunda məsələ həllinə tətbiqi metodikası: Ped.elm.nam. ...dis.avtoref. Bakı, 1988.

E-mail: sona.asadova.94@mail.ru

Rəyçilər: *ped.ü.elm.dok., prof.* **A.S. Adıgözəlov**, *dos.* **A. Cəfərov**

Redaksiyaya daxil olub: 14.03.2018