UOT 37.01

Zümrüd Tofiq qızı Əzimova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

MƏKTƏB RİYAZİYYAT KURSUNDA MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİNƏ VEKTORLAR CƏBRİ ÜSULUNUN TƏTBİQİ İMKANLARI

Зумруд Тофиг гызы Азимова
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ВЕКТОРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО КУРСА

Zumrud Tofig Ezimova
Azerbaijan State Pedagogical University

OPPORTUNITIES FOR APPLYING THE ALGEBRAIC VECTOR TO THE SOLUTION OF ISSUES IN THE SCHOOL MATH COURSE

Xülasə: Vektorlar cəbr kursunda bir çox məsələlərin həllində istifadə edilir. Məktəb riyaziyyat kursunda Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinin isbatı vektorların köməyilə nəzərdən keçirilmişdir. Vektorlar vasitəsilə ifadələrin ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin tapılması nəzərdən keçirilmişdir. Vektorlar cəbrinin məktəb riyaziyyat kursunda fənn daxili əlaqələri açıqlanmışdır. Məqalədə bəzi nümunəvi misallar həlli verilmişdir.
Açar sözlər: *Vektor, bərabərsizlik, uzunluq, bucaq, parça*

Резюме: Векторы используются для решения многих вопросов на курсе алгебры. В статье рассматривалось доказательство неравенства Коши-Буняковского с помощью векторов. Раскрываются внутрипредметные связи алгебры векторов на школьном курсе математики. Векторы были исследованы для нахождения наибольших и наименьших значений выражений. В статье даны примеры некоторых образцовых решений.
Ключевые слова: *вектор, неравенество,длина,угол ,отрезок*

Summary: Vectors are used to solve many issues in gthe algebra course.The proof of Cauchy – Bunyakovsky inequality were investigated with the help of vectors in school math course.The vectors have been explained to find the largest and lowest values of expressions.Vector algebra and subjects of mathematics courses at the school of internal relations.Some exemplary solutions of examples was given in the article
Keywords: *Vector,indifference, length ,angle ,piece*

$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$- istənilən həqiqi ədədlər olduqda $(x_1 x_2 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + ..;. + x_n^2)$ $(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2)$ (1) münasibəti Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyi adlanır.
Type equation here.

Bu bərabərsizlik istər cəbrin istərsə də, həndəsənin bir sıra məsələlərinin həllində çox istifadə edilən bərabərsizliklərdəndir. Onun öyrənilməsi məktəbin icbari proqramına daxil deyildir. Lakin ondan yuxarı sinif şagirdləri üçün maraq məşğələlərində istifadə etmək olar. Şagirdlər üçün yazılmış vəsaitlərin çoxunda Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinin cəbri isbatı verilmişdir. Hazırki məktəbin riyaziyyat proqramı bu bərabərsizliyin müstəvi və fəza üçün həndəsi isbatını da nəzərdən keçirməyə imkan verir.

Sinifdən xaric məşğələlərdə Koşı-Bunyakovski bərabərsizliyinin isbatının vektorların köməyi ilə nəzərdən keçirilməsi faydalı olar.

Doqquzuncu sinifdə məktəb həndəsə kursundan məlum olan skalyar hasilin tərifindən istifadə edərək $|\vec{a}\cdot\vec{b}\,| \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ olduğunu göstərmək olar. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollinear olduqda bərabərlik alınır. $|\vec{a}\cdot\vec{b}\,| \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ bərabərsizliyi Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinin vektorlar cəbri dilində yazılışıdır.

Onuncu sinifdə şagirdlər fəzada koordinatlarla tanış olaraq vektorun nizamlı ədədlər üçlüyü ilə yazılışını, koordinatlarına görə vektorun uzunluğunun hesablanması düsturunu, iki vektorun skalyar hasilinin koordinatlarla istifadəsini öyrənirlər. Ona görə bərabərsizliyin vektorlar dilində yazılışından bu bərabərsizliyin koordinatlar dilində yazılışına keçmək heç də çətinlik törətmir.

Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları fəzada düzbucaqlı dekart koordinat sistemində öz koordinatları ilə verilərsə

$\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$

Onda $|\vec{a}\cdot\vec{b}\,| \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}\,| \Rightarrow (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2 \le (x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)$.

$x_2=kx_1$, $y_2=ky_1$, $z_2=kz_1$ olarsa yəni düzbucaqlı dekart bazisdə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının ayrılışındakı əmsallar mütənasib olduqda bərabərsizlik bərabərliyə çevrilir.

Bu bərabərsizliyin vektorlar vasitəsilə isbatı və onun orta məktəbin cəbr kursunun bir sıra məsələlərinin həllinə tətbiqi göstərir ki, vektorlar cəbri cəbrlə həndəsəni əlaqələndirən vasitədir.

İfadələrin ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin tapılmasına aid bir sıra məsələləri nəzərdən keçirək. Həmin məsələlərin həllində düzbucaqlı dekart bazisdə vektorları nəzərdən keçirəcəyik.

Məsələ 1. $3\cos x + 4\sin x$ ifadəsinin ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

Həlli $\vec{a}=(3;\ 4)$, $\vec{b}=(\cos x, \sin x)$ olsun. Onda

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cos x + 4\sin x$, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2+b_2^2} = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1.$$

$|\vec{a}\cdot\vec{b}\,| \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ bərabərsizliyinə əsasən $|3\cos x + 4\sin x| \le 5$ alırıq.

Aydındır ki, $3\cos x + 4\sin x$ ifadəsinin ən böyük qiyməti 5, ən kiçik qiyməti isə 5- dir.

Ən böyük və ən kiçik qiymətlərin yuxarıdakı məsələdə göstərilən üsulu bir sıra cəbri ifadələrin ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin tapılmasına tətbiq edilə bilər.

Məsələ 2. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ olarsa, $2x - y + 2z$ ifadəsinin ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

Həlli: Verilmiş $2x - y + 2z$ ifadəsinə $\vec{a}=(2;-1;2)$ və $\vec{b}=(x;y;z)$ vektorlarının skalyar hasili kimi baxmaq olar.

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = 3$ və $|\vec{b}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2$ olduğundan

$|\vec{a}\cdot\vec{b}\,| \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ bərabərsizliyinə əsasən $|2x - y + 2z| \le 6$ alırıq.

Burdan $2x - y + 2z$ ifadəsinin ən böyük qiyməti 6, ən kiçik qiyməti -6 olduğunu söyləmək olar. $|\vec{a}| = 5$

Məsələ 3. $\frac{3+8x-3x^2}{1+x^2}$ ifadəsinin ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

Həlli: verilmiş $\frac{3+8x-3x^2}{1+x^2}$ kəsrini iki kəsrin cəmi şəklində göstərək

$$\frac{3+8x-3x^2}{1+x^2} = 3\frac{1-x^2}{1+x^2} + 4\frac{2x}{1+x^2}$$

Onda elə iki $\vec{a}=(3\ ;4)$ və $\vec{b}=\left(\frac{1-x^2}{1+x^2};\ \frac{2x}{1+x^2}\right)$ vektorlarını nəzərdən keçirmək olar ki,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{3+8x-3x^2}{1+x^2}$$

olsun. $\vec{a}=(3\ ;4)$ vektorunun uzunluğu $|\vec{a}| = 5$,

$\vec{b}=\left(\frac{1-x^2}{1+x^2};\ \frac{2x}{1+x^2}\right)$ vektorunun uzunluğu

$$\vec{b} = \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2+\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = 1$$

Olduğundan

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

Bərabərsizliyinə əsasən

$\left|\frac{3+8x-3x^2}{1+x^2}\right|\leq 5$

alırıq. Beləliklə, verilmiş kəsrin ən böyük qiyməti 5, ən kiçik qiyməti isə -5 olur.

Analoji qayda ilə p və q istənilən həqiqi ədədlər olduqda

$$\frac{p(1-t^2)+q(2t)}{1+t^2}$$

Şəklində istənilən kəsrlər üçün, həmçinin t=k(x+$\frac{b_1}{2a_1}$) əvəzləməsi ilə $\frac{p(1-t^2)+q(2t)}{1+t^2}$ şəklinə gətirilən $\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ şəklində kəsrlər üçün həmin məsələləri nəzərdən keçirmək olar.

Məlumdur ki, 3 məsələsinə analoji məsələlər bir qayda olaraq diferensial hesabının tətbiqi ilə həll edilir. Vektorlar cəbri metodunun tətbiqi belə məsələlərin həndəsi baxımdan nəzərdən keçirilməsinə imkan verir. Bu isə riyaziyyatın müxtəlif bölmələri arasında qarşılıqlı əlaqənin olduğunu göstərir. Bundan başqa, məsələ həllinin müxtəlif üsullarının tutuşdurulması və müqayisə edilməsi yeni məsələnin həllində metodun seçilməsi məsələsinə şagirdi daha düşüncəli yanaşmağa məcbur edir.

Koşi – Bunyakovski bərabərsizliyinin köməyi ilə bir bərabərsizliyin isbatını göstərək.

Məsələ 4. a+ b + c= 1 olduqda

$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\leq\sqrt{15}$

Olduğunu isbat edin.

Həlli :

$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}=\vec{p}\cdot\vec{q}$ olsun.

Burada $\vec{p}=(1;1;1)$

$\vec{q}=\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}$

$\vec{p}$ və $\vec{q}$ vektorlarının uzunluqlarını hesablayaq:

$|\vec{p}|=\sqrt{3}$, $|\vec{q}|=\sqrt{2(a+b+c)+3}=\sqrt{5}$

$|\vec{p}\cdot\vec{q}|\leq|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|$ bərabərsizliyinə əsasən

$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\leq\sqrt{15}$

alarıq. a=b=c= $\frac{1}{3}$ olduqda bərabərsizlik bərabərliyə çevrilir.

Məqalənin aktuallığı. Vektor anlayışı Məktəb Riyaziyyat Kursuna son illərdə daxil edildiyindən onun öyrənilməsində bəzi metodik çətinliklər meydana çıxır. İşdə tərəfimizdən həmin çətinliklərdən bəzilərinin aradan qaldırılması yolları işlənmişdir.

Məqalənin elmi yeniliyi. Məktəb riyaziyyat kursunda bir sıra məsələlərin isbatına vektorların tətbiqi imkanları işlənmişdir.

Məqalənin praktiki əhəmiyyəti. Məqalədə bərabərsizliklərin vektorlar üsulu ilə isbatı praktik müəllimlər üçün əhəmiyyətli olacaqdır.

Ədəbiyyat:

1. Mərdanov M.C. və b. Həndəsə: Ümumtəhsil məktəblərinin 8-ci sinfi üçün dərslik Bakı: Çaşıoğlu, 2004.
2. Kolmoqorov A.N. Həndəsə: Orta məktəblərin 6-8-ci sinifləri üçün dərs vəsaiti / A.N. Kolmoqorovun redaktəsi ilə Bakı: Maarif, 1983.
3. Poqorelov A.V. Həndəsə: Orta məktəbin 7-11-ci sinifləri üçün dərslik Bakı: Maarif, 1991.

E-mail emerald.aziz@bk.ru

Rəyçilər: *ped.ü.e.d., prof.* A.S. Adıgözəlov,
ped.ü.e.d.,dos. N.B. Nəsirov
Redaksiyaya daxil olub: 18.05.2018