UOT 37.01

Fəxrəddin Feyzullah oğlu Əliyev,
Mehman Nəbi oğlu Sadiqov
Sumqayıt Dövlət Universitetinin dosentləri
Ülkər Rafiq qızı Babayeva
Sumqayıt Dövlət Universitetinin assistenti

ƏDƏDİN TAM HİSSƏSİ İLƏ BAĞLI MARAQLI FAKTLAR

Фахреддин Фейзуллах оглу Алиев,
Мехман Наби оглу Садиков
доценты Сумгаитского Государственного Университета
Улькер Рафиг гызы Бабаева
ассистент Сумгаитского Государственного Университета

ИНТЕРЕСНЫЕ ФАКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С ЦЕЛОЙ ЧАСТЬЮ ЧИСЛА

Fakhraddin Feyzullah Aliyev,
Mehman Nabi Sadikov
Associate Professors of the Sumgait State University
Ulker Rafiq Babayeva
Assistant of the Sumgait State University

INTERESTING FACTS RELATED TO THE PART OF THE NUMBER

Xülasə: Məqalədə ədədin kəsr hissəsinin tərifi ilk dəfə göstərilir və sadə bir misal verilir. Sonra ədədin kəsr hissəsinin tapılmasına və onun tətbiq edilməsinə aid bir neçə misala baxılır. Burada məktəb riyaziyyat kursunda fənlərin qarşılıqlı əlaqəli tədrisinin qənaətbəxş olmadığı göstərilir. Ona görə də yeni biliklərə ehtiyac duyulur. Məqalədə dörd teorem isbat olunur və bu teoremlərə aid misal həll olunur. Bundan başqa, məqalədə göstərilən məlumatların praktiki əhəmiyyəti əsaslandırılır və bu məlumatların bərabərsizliklər və tənliklərin həllinə tətbiqi məqsədəuyğundur.

Açar sözlər: *ədəd, ədədin tam hissəsi, mənfi olmayan, natural ədəd, teorem, bərabərlik, bərabərsizlik, ardıcıllıq, tənlik*

Резюме: В статье впервые упоминается определение точной части числа и дается простой пример. Затем приводятся некоторые примеры точной части номера и рассмотрен пример их применения. Здесь указывается, что преподавание всего количества предметов не является удовлетворительным в школьном математическом курсе. Поэтому потребность в новых знаниях необходима. Статья содержит четыре теоремы, и все они доказаны, и пример решения дается применением этих теорем. Кроме того, обоснованное практическое значение представленных в статье фактов обосновано, и применение этих фактов к решению неравенств и уравнений считается целесообразным.

Ключевые слова: *число, целая часть числа, не отрицательное число, натуральное число, теорема, равенство, неравенство, последовательность, уравнение.*

Summary: The article first mentions the definition of the exact part of a number and gives a simple example. Then some examples of the exact part of the number are given and an example of their application is considered. It indicates that the teaching of the whole number of subjects is not satisfactory in the school mathematics course. Therefore, the need for new knowledge is necessary. The paper contains four theorems, and all of them are proved, and an example of a solution is given by the application of these theorems. In addition, the substantiated practical significance of the facts presented in the article is justified, and the application of these facts to the solution of inequalities and equations is considered expedient.

Key words: *Number, numerical complete (whole) part, negative, natural number, theorem, equality, inequality, succession, equation*

Məlumdur ki, x ədədinin tam hissəsi x-in özündən böyük olmayan ən böyük tam ədədə deyilir və $[x]$ kimi işarə edilir. Məsələn,

$[2{,}8]=2$; $[3]=3$; $[0]=0$; $[0{,}9]=0$; $[-2{,}5]=-3$; $[-1{,}5]=-2$; $[-0{,}2]=-1$; $[\pi]=3$; $[-\pi]=-4$; $[\sqrt{15}]=3$; $\left[12\frac{3}{7}+5\frac{3}{7}\right]=17$ və s.

İndi ədədin tam hissəsinin xassələrini nəzərdən keçirək:

I. $[y]=n$ bərabərliyindən alınır ki,

1) n-tam ədəddir,

2) $y=n+a$, burada $0\le a<1$,

3) $0\le y-n<1$.

II. Əgər $|U|=|V|$ olarsa, onda $U=m+a$ və $V=m+b$ olar. Burada $0\le a<1$ və $0\le b<1$. Buradan alınır ki, $U-V=a-b$ və $|U-V|<1$ bərabərliyi də doğrudur.

III. Əgər $[x+y]=x$ bərabərliyi ödənərsə, onda x-tam ədəddir və $0\le y<1$ olmalıdır.

IV. Əgər n tam ədəddirsə, onda $[n+x]=n+[x]$ olar.

Ədədin tam hissəsinin tərif və xassələrini nəzərə alaraq, müxtəlif forma və məzmunda məsələ, misal və tənlik həllərini tədqiq edək:

Misal 1. Aşağıdakı tənliyi həll edin:

$$\left[\frac{8x+19}{7}\right]=\frac{16(x+1)}{11}$$

Ədədin kəsr hissəsinin tərifinə görə bu tənliyin kökü aşağıdakı bərabərsizliyi ödəyir:

$$0\le\frac{8x+19}{7}-\frac{16(x+1)}{11}<1.$$

Bu bərabərsizliyi həll etməklə alarıq:

$$-\frac{19}{7}+\frac{16}{11}\le\frac{8x}{7}-\frac{16x}{11}<1-\frac{19}{7}+\frac{16}{11},$$

$$\frac{-19\cdot11+16\cdot7}{77}\le\frac{88x-112x}{77}<\frac{77-19\cdot11+16\cdot7}{77},$$

$$\frac{-97}{77}\le\frac{-24x}{77}<\frac{-20}{77},$$

$$\frac{97}{24}\ge x>\frac{20}{24},$$

$$\frac{5}{6}<x\le4\frac{1}{24}$$

İndi verilmiş tənliyin $\frac{16(x+1)}{11}$ – sağ tərəfinin tam ədəd olması faktına nəzər yetirək. Tərifə görə $\frac{16(x+1)}{11}$-in tam ədəd olması üçün sonsuz sayda x-lərdən $\frac{5}{6}<x\le4\frac{1}{24}$ bərabərsizliyini ödəyənləri seçməliyik. Bunun üçün $\frac{16(x+1)}{11}=t$ qəbul edib verilmiş tənlikdə x dəyişənindən yeni t dəyişəninə keçək. Aydındır ki, t tam ədəddir. $\frac{16(x+1)}{11}=t$ olmasından alırıq ki, $x=\frac{11t-16}{16}$. x -in bu qiymətini verilmiş tənlikdə yerinə yazsaq, onda

$$\left[\frac{11t+22}{14}\right]=t$$

alarıq. Ədədin kəsr hissəsinin tərifinə görə

$$0\le\frac{11t+22}{14}-t<1$$

yaza bilərik. Bu bərabərsizliyi həll etsək, $2\frac{2}{3}\le t<7\frac{1}{3}$ alarıq. t ədədi tam ədəd olduğundan buradan $t=3;4;5;6;7$ alarıq. t-nin bu qiymətlərini əvəzləmədə yerinə yazsaq, x -in axtarılan qiymətlərinin $1\frac{1}{16}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{7}{16}$, $3\frac{1}{8}$, $3\frac{13}{16}$ olduğunu alırıq. Bununla da tənliyi həll etmiş olduq.

Ədədin tam hissəsilə bağlı bəzi maraqlı teoremlərə baxaq, hansı ki, bu araşdırmalar orta məktəb riyaziyyat kursunda dərindən araşdırılmır. Ancaq praktik olaraq tez-tez rast gəlinə bilir.

Teorem 1. Əgər n mənfi olmayan tam ədəddirsə, onda $[nx]\ge n\cdot[x]$ bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı.

Fərz edək ki, $[x]=m$, aydındır ki, onda $x=m+a$ olar, burada $0\le a<1$.

Əgər

$[nx]=[n(m+a)]=[nm+na]=nm+[na]$, $[nx]=nm+[na]$ bərabərliyində $m=[x]$ olduğunu nəzərə alsaq, $[nx]=n[x]+[na]$ alarıq. Buradan isə $[na]\ge0$ olduğundan $[nx]\ge n[x]$ doğru bərabərsizliyini alarıq.

Məsələn,

$$\left[6\cdot5\frac{2}{3}\right]>6\cdot\left[5\frac{2}{3}\right];$$

$$\left[6\cdot 5\frac{1}{7}\right]=6\cdot\left[5\frac{1}{7}\right];$$
$$\left[6\cdot\left(-5\frac{2}{3}\right)\right]>6\cdot\left[-5\frac{2}{3}\right];$$
$$\left[6\cdot\left(-5\frac{11}{12}\right)\right]=6\cdot\left[-5\frac{11}{12}\right].$$

Teorem 2. İxtiyari iki N və q ədədləri üçün $\left[\frac{N}{q}\right]\cdot q\leq N$ bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı.

Tutaq ki, $N=mq+r, 0\leq r<m$ olsun. Bu halda $\frac{N}{q}=m+\frac{r}{q}$ və $0\leq\frac{r}{q}<1$ olar. Buradan $\left[\frac{N}{q}\right]=m$ olar. $N=mq+r$ bərabərliyindən alınır ki, $N\geq mq$. Burada $m=\left[\frac{N}{q}\right]$ bərabərliyini nəzərə alsaq, onda $N\geq\left[\frac{N}{q}\right]\cdot q$, yəni $\left[\frac{N}{q}\right]\cdot q\leq N$ olar.

Məsələn,

$\left[\frac{20}{3}\right]\cdot 3<20$; $\left[\frac{20}{4}\right]\cdot 4=20.$

Teorem 3. İxtiyari iki natural N və q ədədləri üçün $\left\{\left[\frac{N}{q}\right]+1\right\}\cdot q>N$ bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı.

Tutaq ki, m tam ədəddir və $N=mq+r, 0\leq r<m$. Buradan $\frac{N}{q}=m+\frac{r}{q}$; $0\leq\frac{r}{q}<1$ alarıq. Onda $\left[\frac{N}{q}\right]=m$ olar. $N=mq+r$ bərabərliyindən alınır ki, $N<(m+1)q$ doğrudur. Burada $m=\left[\frac{N}{q}\right]$ olduğunu nəzərə alsaq, $N<\left\{\left[\frac{N}{q}\right]+1\right\}\cdot q$ və ya $\left\{\left[\frac{N}{q}\right]+1\right\}\cdot q>N$ olar ki, bizdən də bunun isbatı tələb olunurdu.

Məsələn, $\left\{\left[\frac{20}{3}\right]+1\right\}\cdot 3>20.$

Teorem 4. $1,2,3,4,5,\ldots,n$ natural ədədlər ardıcıllığında q natural ədədinə bölünən $\left[\frac{n}{q}\right]$ sayda ədəd var.

İsbatı.

1) Aydındır ki, əgər $q>n$ olarsa, $\left[\frac{n}{q}\right]=0$ olduğundan teorem doğrudur.

2) əgər $q=n$ olarsa, $\left[\frac{n}{q}\right]=1$ olduğundan bu halda da teorem doğrudur.

3) Sonda $q<n$ halını araşdıraq. Bu halda verilmiş ədədlər ardıcıllığı içərisində q -yə bölünən ədədlər $1\cdot q,\ 2\cdot q,\ 3\cdot q,\ldots,\left[\frac{n}{q}\right]\cdot q$ olacaqdır.

Teorem 2-yə görə $\left[\frac{n}{q}\right]\cdot q\leq n$ şərti doğru olduğundan $\left[\frac{n}{q}\right]\cdot q$ natural ədədi q-yə bölünür və həmin ədəd verilmiş ədədlər ardıcıllığına daxildir. Həmçinin, $\left[\frac{n}{q}\right]\cdot q$ ədədindən sonra gələn və q -yə bölünən növbəti ədəd $\left\{\left[\frac{n}{q}\right]+1\right\}\cdot q$ ədədi olacaq. Lakin, teorem 3-ə görə bu ədəd n-dən böyük olduğundan o, verilmiş ədədlər ardıcıllığında yoxdur.

Beləliklə, biz isbat etdik ki, verilmiş $1,2,3,4,5,\ldots,n$ ədədlər ardıcıllığı içərisində q -yə bölünən ədədlər $1\cdot q, 2\cdot q, 3\cdot q,\ldots,\left[\frac{n}{q}\right]\cdot q$ ardıcıllığından ibarətdir və bu ədədlər $\left[\frac{n}{q}\right]$ saydadır.

Bu teoremdən belə bir nəticə çıxır:

Nəticə. $1,2,3,4,5,\ldots,n$ natural ədədlər ardıcıllığında q^2-na bölünən $\left[\frac{n}{q^2}\right]$ sayda, q^3-na bölünən $\left[\frac{n}{q^3}\right]$ sayda və s. ədəd var.

Məsələn, $[x]=x^3-21$ tənliyini həll edək.

Tənliyi misal 1-in həllinə uyğun və həm də ədədin tam hissəsinin tərifinə əsaslanaraq 2 üsulla həll edək.

I ü s u l. $x^3-21=t$ əvəz edək, t tam ədəddir. t-ni qiymətləndirməyə çalışaq.

$x^3-21=t\Rightarrow x^3=t+21\Rightarrow$

$x=\sqrt[3]{t+21}\Rightarrow 0\leq\sqrt[3]{t+21}-t<1$

Bu bərabərsizlikdən eyni zamanda iki nəticə alınır:

1) $\left.\begin{array}{r}\sqrt[3]{t+21} < t+1\\ \sqrt[3]{t+21} \geq t\end{array}\right\}$ və

2) $\left.\begin{array}{r}(t+1)^3 - t > 21\\ t^3 - t \leq 21\end{array}\right\}$

I bərabərsizlik $t = 2,3,4,\ldots$ qiymətlərində ödəndiyi halda II bərabərsizlik isə $t = 2,1,0,-1,\ldots$ qiymətlərində ödənir. Deməli, hər iki bərabərsizlik eyni zamanda yalnız $t = 2$ olduqda ödənir. Bu qiyməti $x^3 - 21 = t$ tənliyində t-nin yerinə yazsaq, onda tənliyin $x = \sqrt[3]{23}$ yeganə həllini alarıq.

II ü s u l. Ədədin tam hissəsinin tərifinə görə $[x] = x^3 - 21$ tənliyindən

$0 \leq x - x^3 + 21 < 1$ yaza bilərik. $-1 < x^3 - x - 21 \leq 0$ olduğundan buradan

$20 < x(x^2 - 1) \leq 21$ alarıq. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, sonuncu bərabərsizliyin həlli $(2,3)$ intervalından ibarətdir. Bu intervalda isə $[x] = 2$. Bütün bunlar onu göstərir ki,

$$x^3 - 21 = 2 \Rightarrow x^3 = 23 \Rightarrow x = \sqrt[3]{23}.$$

Beləliklə, $x = \sqrt[3]{23} \in (2,3)$ şərtini ödədiyindən bu ədəd tənliyin yeganə həllidir.

Problemin elmi yeniliyi. Məqalədə orta məktəbin yuxarı siniflərində müxtəlif tip qeyri standart tənlik və bərabərsizliklərin həlli üçün ədədin tam hissəsi ilə bağlı müxtəlif teorem və metodik göstərişlər öz əksini tapıb.

Problemin praktik əhəmiyyəti və aktuallığı. Məqalədə X-XI siniflərdə şagirdlərin tənlik və bərabərsizliklərin həlli üçün yeni bilik və bacarıqlar verir və bununla da riyaziyyata olan maraqlarını artırır. Orta məktəb riyaziyyatı üçün o qədər də tipik olmayan tənliklərin həlli üçün müxtəlif metodiki göstəriş və priyomlardan istifadə edə bilmək bacarığı formalaşdırılır.

Ədəbiyyat:

1. Туманов С.И. Поиски решения задач. Издательство М.: Просвещение, 1969.
2. Цыпкин А.Г. Справочник по математике. Для средних учебных заведений. М.: Наука, 1984.

E-mail: abdullayev_ayxan@list.ru

Rəyçilər: *dos.* X.S. Həsənova, *dos.* M.N. Heydərova
Redaksiyaya daxil olub: 07.05.2018