UOT 37.01

İmaməli Əli oğlu Rzayev
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

TƏRS TRİQONOMETRİK FUNKSİYALAR DAXİL OLAN TƏNLİKLƏRİN TƏDRİSİ METODİKASI

Имамали Али оглу Рзаев
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СОДЕРЖАЩИЕ ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Imamali Ali Rzayev
Azerbaijan State Pedagogical University

TEACHING METHOD OF EQUATIONS WHICH HAVE INVERSE TRIGONOMETRY FUNCTIONS

Xülasə*:* Məqalənin əsas məqsədi tərs triqonometrik tənliklər haqqında məlumat verməkdir. Tərs triqonometrik funksiyaların bir-biri ilə əlaqələrini öyrənməkdir. Məqalədə tərs triqonometrik tənliklərin bir neçə həll yolları göstərilmişdir.
Açar sözlər: *Funksiya, triqonometriya, tərs triqonometriya, tənlik, arksinus, arkkosinus, arktangens, arkkotangens.*

Резюме: Основная цель статьи – дать информацию об обратных тригонометрических уравнениях и изучение связи между обратными тригонометрическими функциями. В статье показаны несколько путей решения обратных тригонометрических уравнений
Ключевые слова: *функция, тригонометрия, обратная тригонометрия, уравнение, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотанге*

Summary: The main purpose of article are those give a information about the inverse of trigonometry and learn relations between each other. In article shown that some solution method of inverse trigonometry.
Key words: *function, trigonometry, inverse trigonometric function, equation, arcsin, arccos, arctan, arcctan.*

Tərs triqonometrik tənliklərə müasir dərsliklərdə demək olar ki, yer ayrılmamışdır. Lakin bu mövzu tərs triqonometrik funksiyaları daha dərindən və hərtərəfli öyrənmək baxımından vacibdir. Mövzunun tədrisindən öncə şagirdlərdə bir neçə istiqamətdə biliklər olmalıdır. Onlar tənliklərin həllini, triqonometrik və tərs triqonometrik funksiyaların xassələrini, həmçinin onlar arasında əlaqə düsturlarını öyrəndikdən sonra mövzunu qavraya bilərlər. Şagirdlərin bu mövzuları yaxşı mənimsədiyinə əmin olduqdan sonra tərs triqonometrik funksiyalar daxil olan tənlikləri araşdıraq.

Tərif: Dəyişəni tərs triqonometrik ifadə altında olan tənliklərə tərs triqonometrik funksiyalar daxil olan tənliklər deyilir.

Bu tərifdən aydındır ki,

$x^2 + \sin x + \arcsin \frac{\pi}{2} = \arccos \frac{\pi}{4}$

şəklində verilən tənliklərdə dəyişən tərs triqonometrik funksiyalara aid deyil. Burada tərs triqonometrik ifadələr yalnız konkret bir ədəd kimi iştirak edir. Ona görə də bu cür tənliklərə tərs triqonometrik funksiyalar daxil olan tənlik kimi baxa bilmərik.

Əvvəlcə ən sadə tərs triqonometrik funksiyalar daxil olan tənliklərə baxaq. Bunlar:

1) $\arcsin x = a$ 2) $\arccos x = a$

3) arctg $x = a$ 4) arcctg $x = a$

tənlikləridir. Bu tənliklərin həll olunmasının metodik şərhini verək.

Tərs triqonometrik funksiyaların tərifindən və xassələrindən istifadə edərək aşağıdakıları yaza bilərik:

I) a) arcsin $x = a$. Arksinus funksiyasının qiymətlər oblastı $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ parçası olduğu üçün, yalnız $a \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ olduqda tənliyin $x = \sin a$ həlli var. $a \notin \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ olduqda isə tənliyin həlli yoxdur.

b) Tərs triqonometrik funksiyaların xassələrinə görə bu funksiyalar öz təyin oblastlarında monotondur. Ona görə də aşağıdakıları yaza bilərik.

arcsin f(x) = arcsin g(x) tənliyini aşağıdakı qarışıq sistemlə əvəz edib həll etmək olar.

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ |f(x)| \le 1 \\ |g(x)| \le 1 \end{cases}$$

Bu münasibəti irəlidə digər tərs funksiyalar üçün də qeyd edəcəyik.

c) Əgər tənlik f (arcsin x) = 0 şəklində verilərsə, onda bu tənliyi t = arcsin x əvəzləməsinin köməyilə

$\begin{cases} f(t) = 0 \\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ sistem şəklinə sala bilərik.

Misal: 2(arcsin $x)^2$ − 9arcsin x +2 = 0 tənliyini həll edin.

Həlli: burada t = arcsin x əvəzləməsi aparsaq, onda

$2t^2 - 9t + 2 = 0$

kvadrat tənliyini almış olarıq. Bu tənliklə isə şagirdlər aşağı siniflərdən tanışdırlar. Ona görə də tənlik asanlıqla həll olunduqdan sonra $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 4$ kökləri tapılır. Burada isə yenidən t = arcsin x əvəzləməsinə qayıdaq.

arcsin $x = \frac{1}{2}$ 1) $\frac{1}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ 2) $x = \sin\frac{1}{2}$

və

arcsin $x = 4$ 1) $4 \notin \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ olduğu üçün bu tənliyin həlli yoxdur.

Cavab: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

II) a) arccos $x = a$. Arkkosinus funksiyası $[0;\pi]$ parçasında yerləşdiyi üçün $a \in [0;\pi]$ olduqda tənliyin $x = \cos a$ olan həlli vardır. $a \notin [0;\pi]$ olduqda isə tənliyin həlli yoxdur.

b) arccos f(x)= arccos g(x) .

Tənlikdə yenə də eyni bir funksiyanın müxtəlif arqumentləri verildiyi üçün bu cür tənlikləri şagirdlərin özlərinin araşdırması daha məqsədəuyğundur.

III) a) arctg $x = a$. Arktangens funksiyası $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında təyin olunduğu üçün $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ olduqda tənliyin $x = \mathrm{tg}\, a$ olan həlli vardır. $a \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ olduqda isə verilmiş tənliyin həlli yoxdur.

b) arctg f(x) = arctg g(x) tənliyini f(x) = g(x) şəklində tənliyə gətirməklə daha sadə şəklə salmaq olar. Burada əvvəli iki funksiyadan fərqli olaraq f(x) və g(x) funksiyalarının hər hansı aralıqda təyin olunması şərti qoyulmur. Çünki arktangens funksiyası $(-\infty; +\infty)$ aralığında təyin olunmuşdur.

Misal: arctg (2x− 1) = arctg (x + 5) tənliyini həll edin.

Həlli: Burada f(x) = 2x − 1 və g(x) = x + 5 -dir. Onda

2x − 1 = x + 5 yaza bilərik. Deməli x = 6 tənliyin yeganə həllidir.

Həllin yoxlanması: arctg (12 − 1) = arctg (6 + 5)

arctg 11 = arctg 11

Cavab: $\{6\}$.

c) f(arctg x) = 0 şəklində verilən tənlikləri də oxşar qayda ilə t = arctg x əvəzləməsi aparmaqla f(t) = 0 şəklində daha sadə tənliyə gətirib həll etmək olar.

IV) arcctg $x = a$ şəklində ən sadə tərs triqonometrik tənlikləri də arctg $x = a$ tənliklərinin araşdırıldığı qayda ilə metodik şərh edə bilərik.

Yuxarıda tərs triqonometrik funksiyalar daxil olan tənlikləri ayrı- ayrılıqda şərh etdik. Bütün bu biliklərə əsaslanaraq bir neçə tərs triqonometrik funksiya daxil olan bəzi tənliklərə baxaq.

arcsin f(x) = arccos g(x) şəklində olan tənlikləri həll etməkçün tənliyin hər iki tərəfinin uyğun triqonometrik funksiyasının qiymətini hesablamaq lazımdır.

arcsin f(x) = arccos g(x)

sin(arcsin f(x)) = sin(arccos g(x))

f(x) = $\sqrt{1-g2(x)}$

bərabərliyini alarıq. Yəni $f^2(x) + g^2(x) = 1$ münasibətini alarıq. Şagirdlər bu bərabərliyin doğruluğunu bildikdən sonra arcsin f(x) = arccos g(x) şəklində verilən tənliklərdə birbaşa olaraq $f^2(x) + g^2(x) = 1$ münasibətindən istifadə edərək daha sadə tənliyə gələ bilərlər.

Aşağıdakı tənliyə baxaq.

Misal: arcsin $\frac{\sqrt{3x-1}}{2}$ = arcsin $\sqrt{\frac{2}{x}}$ tənliyini həll edin.

Həlli: sin(arcsin $\frac{\sqrt{3x-1}}{2}$) = sin(arcsin $\sqrt{\frac{2}{x}}$)

Burada əvvəlki mövzulardan məlum olan triqonometrik funksiyaların tərs triqonometrik funksiyalarının tapılması qaydasından istifadə etsək, onda

$$\frac{\sqrt{3x-1}}{2} = \frac{1}{1+(\sqrt{\frac{2}{x}})2}$$

tənliyi alınacaq. Bu tənliyi isə həll etdikdən sonra $x = -1$ və $x = \frac{2}{3}$ kökləri tapılır.

$x = -1$ olduqda $\sqrt{\frac{2}{x}}$ ifadəsinin mənası olmur. Deməli $x = -1$ kənar kökdür. $x = \frac{2}{3}$ kökü isə f(x) = $\frac{\sqrt{3x-1}}{2}$ və g(x) = $\sqrt{\frac{2}{x}}$ funksiyalarının hər birini mənalı edir. Deməli $x = \frac{2}{3}$ verilən tənliyin köküdür.

Cavab: $\left\{ \frac{2}{3} \right\}$.

arctg f(x) = arcctg g(x) şəklində olan tənlikləri də həll etməkçün tənliyin hər iki tərəfinin uyğun triqonometrik funksiyasının qiymətini tapmaq məqsədəuyğundur.

Problemin aktuallığı. Toxunduğumuz mövzunun tərs triqonometrik funksiyaların öyrənilməsində rolu böyükdür. Bu zaman şagirdlərdə özünüinkişaf, düşünmə və ən əsası da əlaqələndirmə bacarıqları inkişaf edir.

Problemin praktik əhəmiyyəti. Məqalədən müəllimlər, magistrantlar, tələbələr və şagirdlər istifadə edə bilərlər.

Ədəbiyyat:

1. Андронов И. К. и Окунев А. К. Курс тригонометрии. М., 1967.
2. Akif Q. Cəmilə A. Allahverdi C. Novruz N. Triqonometriya. Bakı , 2016.
3. Məmmədov R. Triqonometrik funksiyaların analitik şərhi. Bakı, 1963.
4. Xəlilov H., Heydərov M., Məmmədov R. Riyaziyyat. Bakı, 1993.

Rəyçilər: *ped.ü. elm.dok. prof.* A. S. Adıgözəlov,
ped.ü.fəls.dok., dos. T. M. Əliyeva
Redaksiyaya daxil olub: 06.06.2018