UOT 37.01

Arzu Sübhan qızı İsayeva
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitet

TRİQONOMETRİK FUNKSİYALAR DAXİL OLAN İFADƏLƏRİN EYNİ ÇEVİRMƏLƏRİ HAQQINDA

Арзу Субхан гызы Исаева
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, В КОТОРЫЕ ВХОДЯТ ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Arzu Subhan Isayeva
Azerbaijan State Pedagogical University

TRIGONOMETRIC FUNCTIONS ARE ABOUT THE SAME TRANSFORMATION OF INCOMING EXPRESSIONS

Xülasə: Məqalədə bəzi triqonometrik eyniliklər verilmişdir. Eyniliklə bərabər iki funksiya mahiyyət etibarı ilə müxtəlif düsturlarla göstərilən eyni bir funksiyanı ifadə edir. Həmçinin məqalədə triqonometrik ifadələrin eyni çevrilmələrini yerinə yetirmək üçün triqonometrik funksiyaların tərifindən və xassələrindən istifadə edilmişdir.

Açar sözlər: *Triqonometrik funksiya, arqument, qrafik, tərif*

Резюме: В статье представлены некоторые тригонометрические тождества. В статье также используются определения и свойства тригонометрических функций для выполнения тех же преобразований тригонометрических выражений. В некоторых случаях одно и то же преобразование упрощает вычисление значение выражения.

Ключевые слова*: тригонометрическая функция, аргумент, график, определение*

Summary: There are some trigonometric identities in the article.Also,the definition and properties of trigonometric functions were used to perform the same transformation of trigonometric expressions in the article.In some cases,the same transformation simplifies the process of calculating the value of given expression

Key words*: triangometric function, argument, graphic, definition*

Əvvəlcə eyniliyə aşağıdakı kimi (nəzəri-funksional) tərif verək:

Əgər M çoxluğuna aid olan eyni x,y,...,z arqumentlərdən asılı iki f(x,y,...,z) və g(x,y,...,z) funksiya arqumentlərin istənilən qiymətlərində bərabər qiymətlər alarsa, yəni, əgər (x,y,...,z) $\in M$ olduqda f(x,y,…,z)= g(x,.y…,z) olarsa onlara M-çoxluğunda eyniliklə bərabər funksiyalar deyilir. Bu şəkildə bərbərliyə M-çoxluğunda eyniliklə bərabər funksiyalar deyilir. Bu şəkildə bərabərliyi M-çoxluğunda eynilik adlanır. Eynibərabər funksiyalar və M- çoxluğunda eyniliklərə aid nümunələr göstərək.

1.$\cos x$= sin ($\frac{\pi}{2}+x$), M={ x| x ∈R }

2.cos(x -y) = $\cos x$ cos y + sin x siny, M={(x,y) | x,y ∈R}

Sadəlik üçün M hərfini yazmırlar və bəzən çoxluğu göstərmirlər. Onda eynilik aşağıdakı kimi görünər.

3.$\sin 2x = \frac{2\text{tg}x}{1+tg^2x}\{x|x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, k \in R\}$

4. $1+tg^2x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\{x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in R\}$

5.ctg $x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Sonuncu misalda ctg xvə $\frac{\cos x}{\sin x}$ funksiyaları $\{x\ |x \neq \pi k, k \in R\}$çoxluğunda eyniliklə bərabərdirlər.

Aydındır ki, istənilən iki eyniliklə bərabər funksiya mahiyyət etibarı ilə müxtəlif düsturlarla və ya hər hansı digər üsullarla göstərilən eyni bir funksiyanı ifadə edirlər. Bu vəziyyət verilmiş funksiyanı eyniliklə ona bərabər funksiya ilə əvəz etməyə imkan verir. Müəyyən bir məsələni həll etdikdə və ya araşdırdıqda alınan sonuncu ifadənin daha münasib olması zəruridir. Bunu konkret misal üzərində izah edək.

Misal 1. Tutaq ki, $f(x) = \sin x \cos x$ funksiyası verilmişdir. Aşağıdakıların tapılması tələb olunur: a) onun ən kiçik müsbət periodunu; b) onun ən kiçik qiymət aldığı arqumentin qiymətlərini, c) $f(x) = > \frac{1}{4}$ olması üçün arqumentin qiymətini, ç) onun qrafikini qurun.

Verilmiş $f(x) = \sin x \cos x$ funksiyasını eyniliklə ona bərabər $g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ funksiyası ilə əvəz edək. Onda qoyulan məsələni asanlıqla həll etmək olar:

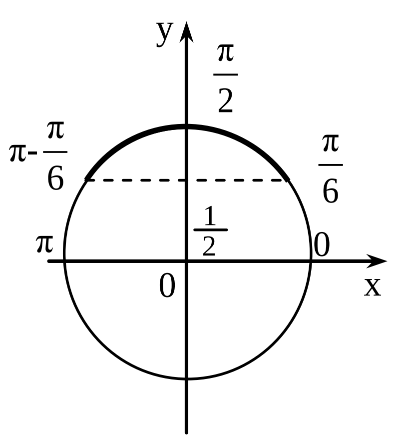
a) Verilmiş funksiyanın axtarılan periodu

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

olar;

b) $\sin 2x = -1$ olduqda verilmiş funksiya ən kiçik qiymət olar. Onda $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ və $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in R$ olduqda .

c) $\frac{1}{2}\sin 2x > \frac{1}{4}$ şərtinə $2x = y$ əvəzləməsi daxil edək. Onda $\sin y > \frac{1}{2}$ alarıq. Vahid dairə üzərində $\frac{\pi}{6}$ və $\pi - \frac{\pi}{6}$ nöqtələrini qeyd edək. Sin y $= \frac{1}{2}$ qiymətinə uyğun



Göründüyü kimi, sin y funksiyasının perioduna bərabər $[0; 2\pi]$ parçasında sin y $> \frac{1}{2}$ bərabərsizliyini $\frac{\pi}{6} < y_0 < \pi - \frac{\pi}{6}$ aralığında yerləşən y_0 ədədi ödəyir. Bu intervalın hər tərəfinə $2\pi k$ ədədini əlavə edərək

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < y_0 + 2\pi k < \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ və ya}$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < y < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

olar.Aydındır ki,

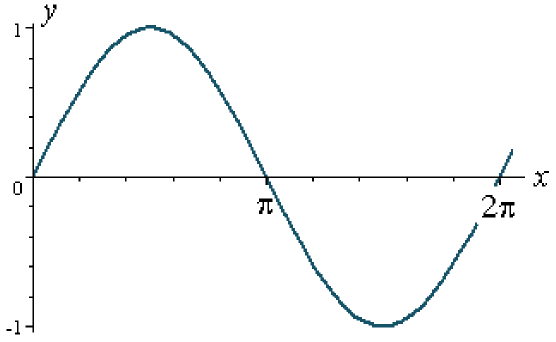
$$\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + \pi k, \ k \in R$$

ç) $f(x) = \sin x \cos x$ *verilmiş funksiyanın qrafiki eyniliklə ona bərabər* $g(x) = \frac{1}{2}\sin 2$ *x funksiyasının qrafiki ilə* üst-üstə düşür. Onu isə $y = \sin x$ sinusoidinin iki ardıcıl çevrilməsindən almaq olar.(şəkil 2): Sinusoidin oy oxuna 2:1 (periodun dəyişməsi) nisbətində sıxılması ilə və alınan y= sin2 x əyrisini 0 x oxuna 2:1 nisbətində(amplitudanın dəyişməsi) sıxılması ilə alınır.

Verilmiş bu məsələdə $f(x) = \sin x \cos x$ funksiyasının eyniliklə ona bərabər $g(x) = \frac{1}{2}$ sin2 x funksiyası ilə əvəz edilməsini

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

eyniliyi ilə ifadə etmək olar. Bu bərabərlik $\{ x \mid x \in R \}$ çoxluğunda doğrudur və bu funksiyaların hər birinin təyin oblastıdır.



Bəzi məsələlərdə verilmiş funksiyanın digər funksiya ilə əvəz edilməsi zərurəti yaranır. Bu zaman həmin funksiyaların təyin oblastları üst-üstə düşməyə bilər. Lakin təyin oblastlarının kəsişdiyi müəyyən hissədə onlar eyniliklə bərabər olurlar. Əgər nəzərdən keçirdiyimiz $f(x) = \sin x \cos x$ funksiyasını tg x funksiyası ilə ifadə etmək tələb olunsa idi onda eyni çevirmə prosesində verilmiş funksiyanın təyin oblastından tg x funksiyasının təyin oblastına daxil olmayan $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in z$) qiymətlərini çıxartmaq lazım gələrdi.

Doğrudan da sin$x$ $cosx = \frac{\sin x \ cosx}{sin^2x+cos^2x}$ M, çoxluğunda $\frac{\sin x \ cosx}{sin^2x+cos^2x} = \frac{tgx}{1+tg^2x}$ M_2 ={ x |$x \neq \frac{\pi}{2}$ + $\pi k, k \in c$} çoxluğunda

Aydındır ki, M, $\cap M_2$ = { x | $x \neq \frac{\pi}{2}$ + $\pi k, k \in c$} çoxluğunda sin$x$ $cosx = \frac{tgx}{1+tg^2x}$ alırıq. Belə ki, bu çevrilmələrlə alınan funksiya verilmiş funksiya ilə yalnız onların təyin oblastlarının ortaq hissəsində eyniliklə bərabər olarlar.

Bütün hallarda eyni çevrilmələrin yerinə yetirilməsində aşağıdakı şərt ödənilir: Əgər

(x,y,...,z) $\in M$, *olduqda* $f(x,y,\dots,z) = g\ (x,y,\dots,z)$ və

(x ,y,...,z) $\in$ M_2 olduqda g $(x,y,\dots,z)$ = h $(x,y,\dots,z)$ olarsa, onda

(x,y,...,z) $\in M, \cap M_2$ olduqda $f(x,y,\dots,z)$ = h $(x,y,\dots,z)$ olar.

Eyniliklər və eyni çevrilmələr haqqında bütün yuxarıda deyilənlər funksiyanı müəyyən edən istənilən triqonometrik ifadələr üçün doğrudur. Belə ifadələrə onların təyin oblastlarını göstərməklə nümunələr gətirək:

a) lg|tg(x + y)|-$2^{\sin(ax+by)}$,

M_1 = {(x,y)| x + y $\neq \frac{\pi}{2}$ k, $k \in z$},

b) $\frac{sin^2(\beta-\frac{\pi}{2})-cos^2(\tau-\frac{3\pi}{2})}{\cos(\tau+\beta)}$,

M_2 = {(τ, β)| $\tau + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi$ k, $k \in z$},

c) $\sqrt{1+\sin(2arcCosx - 1{,}5\pi)}$,

M_3 = { x| |x| $\leq$ 1 }

Burada a və b-ni parametr , x, y, τ, *və* β-ni arqument hesab etsək, onda bu ifadələr aşağıdakı funksiyaları təyin edərlər:

a) f(x,y)=lg|tg(x + y)| - $2^{\sin(ax+by)}$,

(x,y) $\in M_1$;

b) $g(\tau,\beta)\frac{sin^2(\beta-\frac{\pi}{2})-cos^2(\tau-\frac{3\pi}{2})}{\cos(\tau+\beta)}$,

(τ, β) $\in M_2$;

c) $h(x)\sqrt{1+\sin(2arcCosx - 1{,}5\pi)}$,

$x \in M_3$

Qeyd edək ki, triqonometrik funksiyaların daxil olduğu elə ifadələr vardır ki, onlar funksiya təyin etmirlər.

Triqonometrik ifadələrin eyni çevrilmələrini yerinə yetirdikdə triqonometrik funksiyaların tərifi və xassələrindən istifadə olunur. Riyaziyyatda triqonometrik və tərs triqonometrik funksiyalarla əlaqədar teoremlərin isbatında funksiyaların araşdırılmasında, triqonometrik tənliklərin və bərabərsizliklərin həllində, həmçinin onun fizika və mexanika kimi elmlərdə tətbiqlərində triqonometrik ifadələr daxil olan ifadələrin eyni çevrilmələrinə zərurət yaranır. Bir sıra hallarda eyni çevrilmələr verilmiş ifadələrin qiymətinin hesablanması prosesini sadələşdirir. Onu da qeyd etmək zəruridir ki, eyni çevrilmələrin yerinə yetirilməsi yollarına aid heç bir ümumi priyom və metodlar göstərmək olmaz. Hər bir konkret halda verilənlərdən və qarşıya qoyulan məqsədlərdən asılı olaraq şagirdlər müstəqil olaraq münasib düsturları seçməyi və düzgün tətbiq etməyi bacarmalıdırlar.

Problemin praktiki əhəmiyyəti. Bu məqalədən müəllimlər, tələbələr, magistrantlar istifadə edə bilər.

Problemin aktuallığının əsaslandırılması. Məktəb riyaziyyat kursunda cəbri funksiyaların öyrənilməsinə daha çox yer ayrılmışdır. Triqonometrik funksiyaları isə nisbətən az nəzərdən keçirilir. Onların xassələri üzərində aparılan əməllər, eyni çevirmələr, şagirdlər üçün həm maraqlı həm də nisbətən çətinlik törədir. Bu baxımdan seçilən mövzu aktuallıq kəsb edir.

Problemin elmi yeniliyi. Eyniliyin nəzəri funksional tərifi daxil edilmiş, triqonometrik eyniliklərin öyrədilməsinə dair nümunəvi çalışmalar seçilmişdir.

Ədəbiyyat:

1. N. Qəhqəmanova, M. Kərimov, İ. Hüseynov. Riyaziyyat: Ümumtəhsil məktəblərinin IX sinfi üçün dərslik. Bakı, 2017.

2. A. Quliyev və b. Triqonometriya. Bakı, 2016.

E-mail: arzu.nurullayeva8@gmail.com

Rəyçilər: *ped.ü.elm.dok., prof.* A.S. Adıgözəlov,
ped.ü.elm.dok, dos. T.M. Əliyeva
Redaksiyaya daxil olub: 06.06.2018