RİYAZİYYATIN TƏDRİSİ METODİKASI

UOT 37.01

Sərxan Aslan oğlu Feyziyev
pedaqogika üzrə elmlər doktoru

Musa Tapdıq oğlu Rzayev
pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

LİMİT VƏ KƏSİLMƏZLİK ANLAYIŞLARININ FƏNDAXİLİ ANLAYIŞ ƏLAQƏLƏRİ ƏSASINDA TƏDRİSİNƏ DAİR

Сархан Аслан оглу Фейзиев
доктор наук по педагогике

Муса Тапдыг оглуРзаев
доктор философии по педагогике
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

ИЗУЧЕНИЕ ПОНЯТИЙ ПРЕДЕЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ НА ОСНОВЕ ИХ ВНУТРИПРЕДМЕТНОЙ СВЯЗИ

Sarkhan Aslan Feyziyev
doctor of Sciences in pedagogy

Musa Tapdıq Rzayev
PhD in Pedagogy
Azerbaijan State Pedagogical University

THE STUDY OF THE CONCEPTS OF LİMİT AND CONTİNUİTY BASED ON THEİR İNTRA-SUBJECT COMMUNİCATİON

Xülasə: Məqalədə orta ümumtəhsil məktəblərinin riyaziyyat kursunda əsas anlayışlardan biri olan limit və kəsilməzlik anlayışlarından bəhs edilir. Limit və kəsilməzlik anlayışlarının əlaqəli şəkildə öyrənilməsinin yolları nümunələr əsasında göstərilir. Qeyd etmək lazımdır ki, limit və kəsilməzlik anlayışını əlaqəli şəkildə öyrənərkən şagirdlər üçün məlum olan funksiyalar bir daha təkrar mənimsənilir.
***Açar sözlər**: Limit, kəsilməzlik, fəndaxili əlaqə, fəndaxili anlayış əlaqəsi, sonsuz böyük, sonsuz kiçik, kvantor, çoxluq, teorem, period, funksiya, məntiq, qrafik*

Резюме: Статья посвящена одному из основных понятий курса математики общеобразовательных школ, понятиям лимита и непрерывности. Изучение связи понятий лимита и непрерывности показано на основе примеров. Необходимо отметить, что изучение связи понятий лимита и непрерывности приводит к тому, что ученики повторно усваивают известные им функции
***Ключевые слова**: лимит, непрерывность, внутрипредметная связь, понятие внутрипредметной связи, бесконечно большая, бесконечно малая, квантор, множество, теорема, период, функция, логика, график*

Summary: The article deals with the concepts of limit and intensity, one of the basic concepts of mathematics in secondary schools. The ways in which the concepts of limit and inconsistency are studied are illustrated on the basis of examples. It would be noted that the functions that are known to the students are re-mastered when learning the understanding o limit and inconsistency in a related way.

Key words: *Limit, inconsistency, intrinsic relationship, intrinsic understanding, infinite large, infinite small, quantum, cluster, theorem, period, function, logic, graphic.*

Riyazi analiz kursunun fundamental anlayışlarından biri **limit** anlayışıdır. Limit anlayışının daxil edilməsi, xüsusilə onun təriflərinin başa düşülməsi kursun sonrakı fundamental anlayışlarının əsasını təşkil edir. Bu, tamamilə aşkardır, çünki digər əsas anlayışların hamısı limitə keçmə prosesi vasitəsilə daxil edilir. Lakin limit anlayışının asan və qısa vaxt intervalında şüurlu mənimsənilməsi gərgin əqli fəaliyyət tələb edir. Bu, ilk növbədə, limit anlayışının şərh edilməsi üçün zəruri olan dil konstruksiyası ilə əlaqədardır. Dil konstruksiyalarını tətbiq etmədən (işlətmədən) limitin tərifini məntiqi ciddiliklə vermək mümkün deyil. Ona görə də analiz kursunun öyrənilməsi zamanı şagirdlər birdənbirə məntiqi çətinliklərlə qarşılaşmalı olurlar. Deməli, analiz kursunun öyrənilməsi prosesində çətinliklərin qarşıya çıxması tamamilə təbiidir və kursun özünün xüsusiyyətindən doğur. Müəllim kursun öyrənilməsinə başlayan andan bu xüsusiyyətləri vaxtında və sistematik nəzərə almalı, özünəməxsus metodik priyomlar, yanaşma işləməlidir. Limit anlayışının şagirdlər tərəfindən nə dərəcədə başa düşülməsi daimi diqqət mərkəzində saxlamalıdır. Çünki riyazi analiz kursunun əsas metodu limitə keçmədir.

Limitə keçmə ideyası, öz növbəsində, sonsuz dəyişmə (artma və ya azalma) ideyası ilə bağlıdır. Bu ideyaların adekvat ifadəsi üçün yuxarıda qeyd edildiyi kimi, xüsusi dil konstruksiyaları işlənmişdir. Məhz dil konstruksiyalarının mürəkkəbliyi analizin öyrənilməsində başlıca çətinliklərdən biridir. Məsələn, ardıcıllığın limitinin tərifinə baxaq.

Tərif: *a*-ədədinin $\{X_n\}$- ardıcıllığının limiti olması üçün ixtiyari müsbət $\varepsilon - a$ görə elə natural *N*-ədədi tapmaq mümkün olmalıdır ki, $n > N$ şərtini ödəyən bütün *n*-lər üçün $|x_n - a| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilsin.

Tərifdə birmənalı olaraq riyazi terminlər və işarələr (müsbət ədəd, həqiqi ədəd, natural ədəd, böyükdür, kiçikdir) *n*-nin sonsuz böyüməsi prosesində $\{X_n\}$- ardıcıllığının hədləri ilə *a*-ədədi arasında fərqin sonsuz kiçilmə ideyası ifadə olunmuşdur. Ayrılmış sözlər onun məntiqi strukturunu ifadə edir. “ixtiyari”, “hər biri”, “istənilən”, “tapmaq olar”, “yalnız bir”, “mövcuddur”, “heç olmasa” bu sözlər məntiq elmində kvantorlar adlanır. Onlar üç qismə bölünür: ümumilik kvantoru, varlıq kvantoru və yeganəlik kvantoru.

Kvantor sözləri riyazi analiz kursunun hər bir təklifi (teoremi) üçün xarakterikdir. Lakin limitin tərifində adı çəkilən üç kvantor sözlərdən istifadə edilir ki, bu da tərifi son dərəcə genişləndirir. Ona görə də limitin tərifi analizin digər anlayışlarının tərifləri ilə müqayisədə ən mürəkkəb tərif hesab edilir. Çünki tərifin mürəkkəblik dərəcəsi ona daxil olan kvantorların sayından asılıdır. Məsələn, funksiyanın məhdudluğu, periodikliyi, təkliyi-cütlüyü də mürəkkəb təriflər hesab olunur, çünki onların tərifinə iki kvantor daxildir. Deməli, limit anlayışına verilən tərif anlayışın tərifinə uyğun olaraq mürəkkəb tərif hesab olunur.

Riyazi analiz kursunda verilən təriflərin, teoremlərin, ümumiyyətlə, ixtiyari təkliflərin çətin dərk edilməsindəki gərginliyi azaltmaq üçün ilkin metodik yanaşmalardan biri kvantor sözlərin mənalarının əyani-intiutiv səviyyədə ayrıca açıqlamaqdır. Məsələn, kvantor daxil olan tərifin inkarının qurulmasından istifadə edilən metodiki priyomlardan biridir. Belə priyom intiutiv olaraq başa düşüləndir. Bu məqsədlə şagirdlərə kvantor daxil olan təkliflərin inkarının qurulması qaydasını öyrətmək lazımdır. Kvantor daxil olan təklifin inkarının qurulması intuitiv aydın olmasa da bunun üçün qəbul edilmiş qaydanı bilmək kifayətdir. Ümumilik kvantoru daxil olan təklifin inkarını qurmaq üçün varlıq kvantoru ilə əvəz edib, sonra isə kvantorun əvvəlinə təklifin inkarını əlavə etmək lazımdır. Məsələn, “Tərəfləri bərabər olan hər bir paraleloqram rombdur” təklifinin inkarını quraq. “Tərəfləri bərabər olan bəzi paraleloqramlar romb deyil”. Bu qayda aşağıdakı məzmunda təriflərin mənası ilə eynigüclüdür. Doğrudur ki, hər bir *x,p* xassəsinə malikdir və *p* xassəsinə malik olmayan *x*-var və ya bütün *x*-lər *p* xassəsinə malik deyil.

"Eyni qayda ilə a-ədədi $\{X_n\}$ ardıcıllığının limiti deyil" təklifinin mənası var. Belə ki, "Elə bir müsbət $\varepsilon > 0$ var ki, ixtiyari *N* natural ədədi üçün elə $n > N$ var ki, $|X_n - a| \geq Z$". Bu mühakimələrin şagirdlər tərəfindən dərhal başa düşülməsi real deyil. Ona görə də intuitiv olaraq bəzi mümkün olmayan hallara diqqəti cəlb etmək lazımdır.

"İxtiyari natural ədəd üçün daha böyük natural ədəd var" təklifi göstərir ki, natural sıra sonsuzdur. Bu təklif göründüyü kimi doğrudur. "Hər bir natural ədəddən böyük olmayan natural ədəd var" təklifi isə doğru deyil. Bəzi təriflərdə kvantorların əhəmiyyətini göstərək.

Tərif. Elə $l \neq 0$ ədədi tapmaq mümkün olsa ki, təyin oblasta daxil olan ixtiyari *x* üçün $x + l$ və $x - l$ ədədləri də təyin oblasta daxil olduqda və $f(x - l) = f(x + l) = f(x)$ ödənildikdə $f(x)$ funksiyası periodik funksiya adlanır. Göründüyü kimi, tərifdə $l \neq 0$ ədədinin varlığı tərifin əvvəlində deyilir. Bu onu göstərir ki, bütün *x*-lər üçün *l* eynidir. Əgər tərifdə "elə $l \neq 0$ ədədi var ki, təyin oblasta daxil olan ixtiyari *l*-lər üçün ifadələrinin yerlərini dəyişəndə bu tərif tamamilə başqa məna daşıyar".

Periodik funksiyanın şərh etdiyimiz tərifi doğru olsa da korrekt deyil, çünki artıq sözlər onun tərkibinə daxildir. Tərifi aşağıdakı kimi vermək lazımdır: "Elə $l \neq 0$ varsa ki, təyin oblasta daxil olan ixtiyari *x* üçün *x-l* və *x+l* ədədləri də təyin oblasta daxil olsun və $f(x - l) = f(x + l) = f(x)$ bərabərliyi ödənilsin". Limit və kəsilməzliyin "$\varepsilon - \delta$" dilində təriflərində kvantor daxil olan ifadələrini (ixtiyari ε üçün δ var ki,...) göstəririk ki, $\delta > 0$ ümumiyyətlə, ε −dan asılıdır, yəni müxtəlif ε-lar üçün müxtəlif $\delta > 0$ ola bilər.

Analiz kursunun öyrənilməsindəki çətinlik təkcə kvantorla bağlı deyil, həm də bir sıra digər spesifik və ümumi xarakterli çətinliklərlə də bağlıdır. Bir sıra digər çətinliklər zəruri və kafi şərt anlayışı ilə bağlıdır. Funksiyanın təkliyi və cütlüyü misallarında fikrimizi aydınlaşdıraq. Şagirdlər əksər hallarda tək funksiya anlayışını cüt olmayan funksiya anlayışı ilə qarışdırırlar. Belə xarakterik cəhətlərdən yaxa qurtarmaq üçün şagirdlərə başa salmaq lazımdır ki, biz anlayışa tərif verərkən ilkin *A* çoxluğunu götürüb ondan *B* alt çoxluğunu ayırırıq $(B \subset A)$,$(A \cap B)$ obyektlər çoxluğu tərifi ödəyirlər, daha sonra $C = C_B A$ tamamlayıcı çoxluğu ayırırıq. Bu halda tamamlayıcı çoxluğun elementləri tərifi ödəməyən obyektlər olur. Bir sıra digər çətinliklər zəruri və kafi şərt anlayışı ilə bağlıdır. Çünki riyazi analiz kursunda zəruri və kafi şərtlər riyaziyyatın dili rolunu oynayır. Təriflərin verilməsi riyazi təkliflərin şərti və təkliflərin isbat prosesi iki şərtin məntiqi-qarşılıqlı əlaqəsi şəklində verilir və bu da riyazi dilə verilən məcburi tələbdir. Çünki riyazi analiz kursunda zəruri və kafi şərtlər riyaziyyatın dili rolunu oynayır. Təriflərin verilməsi riyazi təkliflərin şərti və təkliflərin isbat prosesi iki şərtin məntiqi-qarşılıqlı əlaqəsi şəklində verilir və bu da riyazi dilə verilən məcburi tələbdir. Analiz kursunun əsas anlayışlarını, məsələn, limit və kəsilməzliyi öyrəndikdən sonra şagirdlər aşağıdakı məzmunda suallara cavab verə bilməlidirlər:

1) Nöqtədə funksiyanın kəsilməzliyi və limitin varlığı üçün kafi şərtlər hansıdır?

2) Funksiyanın nöqtədə limitinin varlığı üçün zəruri şərti şərh edin. Bu şərt nöqtədə kəsilməzlik üçün zəruridirmi?

3) Funksiyanın nöqtədə limitinin olmadığı hal üçün kafi şərti şərh edin. Funksiyanın kəsilməyən olması üçün kafi şərt mümkündürmü?

4) $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində təyin olunmuşdur, lakin onun hər bir ətrafında təyin olunmamışdır. Bu funksiyanın x_0 nöqtəsində hansı xassələrindən danışmaq olar?

5) Verilmiş nöqtədə limiti olan funksiya bu nöqtədə kəsilən ola bilərmi?.

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi, analiz kursunun tədrisi prosesində öyrəniləcək hər bir təlim materialı ədədi funksiyanın bu və ya digər xassələrinin şüurlu mənimsənilməsi, funksiyanın xassələrinin, limit və kəsilməzlik anlayışlarının araşdırılmasına gətirilir. Digər tərəfdən göstərilən anlayışların öyrənilməsində bir sıra xarakterik çətinlikləri, həmçinin şagirdlərin biliklərindəki bəzi ənənəvi nöqsanları müəllim diqqət mərkəzində saxlamalı və tədris prosesində nəzərə almalıdır. Bu nöqsanların bəzilərinə diqqəti cəlb edək:

1) Şagirdlər limitin hesablanmasının elementar texnikasına yiyələnirlər və nöqtədə limiti düzgün hesablayırlar, lakin funksiyanın bu nöq-

tə ətrafında qrafikini sxematik olaraq təsvir edə bilmirlər;

2) Qrafikin hazır şəkli üzərində elementar suallara şagirdlər cavab verə bilmirlər: a) verilmiş funksiyanın $x \to a$ olduqda limiti varmı? b) funksiya $x = a$ nöqtəsində kəsilməyəndirmi?

Göstərilən nöqsanlardan belə nəticəyə gəlmək olur ki, şagirdlər öyrənilmiş anlayışların məzmun aspektlərini başa düşməlidirlər. Bu nöqsanların aradan qaldırılmasının ən asan üsulu öyrənilən materialın əyani-məna cəhətlərini artırmaqdır. Bir sıra hallarda müəllimlər özləri də limit və kəsilməzlik anlayışlarına biganə yanaşır və onları köməkçi anlayış hesab edirlər. Tez bir zamanda törəmə anlayışına keçməyə can atırlar. Lakin nəzərə almırlar ki, az qala bütün analiz kursu limitə keçmə prosesi üzərində qurulmuşdur. Metodik ədəbiyyatlarda limit və kəsilməzlik anlayışlarının əyani-intuitiv əsasda şərhinə metodist tədqiqatçıların da biganə yanaşmalara fikri öz əksini tapmışdır.

Bir sıra metodistlər limit-kəsilməzlik anlayışlarının müəyyən mərhələlərlə öyrənilməsini tövsiyə edirlər. Onlar təklif edirlər ki, bu anlayışlar ilk mərhələdə əyani-illüstrativ, sonra isə formal-məntiqi əsasda öyrədilsin. Anlayışın formal-məntiqi əsasda daxil edilməsi əyani-illüstrativ mərhələlərə istinad etsin. Həm də təlimin bu mərhələsində şagirdlərdə təsəvvür fəallığı xeyli geniş olur. Həmçinin nöqtədə limit anlayışı elə ilk başlanğıcdan kəsilməzliklə sıx qarşılıqlı əlaqədə öyrədilməlidir. Daha sonra, nöqtədə funksiyanın kəsilməzliyinin tərifi əvvəlcə kəsilməzliyin xarakterik xassəsi əsasında verilməlidir. Yəni verilmiş x_0 nöqtəsinin kiçik ətrafında *x*-arqumentinin sonsuz kiçik dəyişməsinə funksiyanın sonsuz kiçik dəyişməsi uyğundur. Bu xassəni riyazi olaraq belə göstərirlər: x_0 nöqtəsinin $(x_0 - \delta, x_0 \in \delta)$ ətrafını $f(x_0)$ -ın $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ ətrafı uyğun olur. Bu halda x_0-ın "δ" ətrafı $f(x_0)$-ın "$\in$" ətrafına inikas olunur. Bu xassəni şagirdlər də asan mənimsəyər və qrafik üzərində asanlıqla göstərə bilərlər. Şagirdlərin bu xassəni daha yaxşı başa düşmələri üçün aşağıdakı təqribi bərabərlikləri yazmaq kifayətdir: $y \approx x_0$ olduqda $f(x_1) \approx f(x_0)$.

Daha sonra limit anlayışının daxil edilməsinə kömək edən əyani misallardan istifadə etmək olar. $y = \frac{x^2}{x-1}$ funksiyasına baxaq.

Əgər şagird yalnız limit anlayışını aydınlaşdırarkən bu funksiyanın qrafiki ilə ilk dəfə rastlaşırsa, onda şəksiz ki, çətinliklə rastlaşmış olur. Deməli, şagird bu və ya buna oxşar kəsilən funksiyaların qrafikləri ilə əvvəlcədən tanış olarsa, artıq bu çətinlik meydana çıxmaz. Ona görə də limit anlayışının daxil edilməsi mərhələsindən əvvəl aşağıdakı kimi analitik şəklə malik funksiyaların qrafikləri üzərində təlim işini təşkil etmək lazımdır.

1) $y = \frac{x^2-1}{x+2}$, 3) $y = \frac{x^2+3x+21}{x+1}$, 4) $y = \frac{|x|}{x}$

şagird birinci funksiyanın qrafikinin $y = x - 2$ funksiyasının qrafiki ilə $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ çoxluğunda üst-üstə düşdüyünü başa düşməlidir. Həmçinin, 3-cü funksiyanın qrafikinin $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ çoxluğunda $y = x + 2$ funksiyasının qrafiki ilə üst-üstə düşdüyünü təyin edə bilməlidir.

Ümumiyyətlə limit və kəsilməzliyin dərindən dərk edilməsi üçün müxtəlif çalışmalar həll etmək vacibdir. Belə çalışmalar nümunəsinə baxaq:

Qrafik əsasında *x*-in uyğun qiymətini göstərin.

$f(x) = a, f(x) > a, f(x) < a, f(x) > f(x_0), f(x) \leq$

$< \varepsilon$

$f(x_0), |f(x) - a| < \varepsilon, |f(x) - f(x_0)|$

Bu çalışmalarda $a \in x_0$ ədədlərinin konkret qiymətlərində konkret funksiyalar üzərində icra etmək lazımdır. Bu çalışmaları eyni ilə başqa şərh şəklində təklif etmək son dərəcə faydalı olur və şagirdlərin təsəvvürlərini genişləndirir.

1) *x*-in hansı qiymətləri üçün $f(x), f(x_0)$-dan ε az meyillidir; 2) *x*-in hansı qiymətləri üçün $f(x)$-in qiymətləri ilə $f(x_0)$-ın fərqi ε-dan kiçikdir; 3) x_0-ın elə ətrafını göstərin ki, bu ətrafda $f(x)$-in qiymətləri $f(x_0)$-ın qiymətinə ε dəqiqliyi ilə tərtibi bərabər olsun; 4) x_0-ın elə ətrafını göstərin ki, bu ətrafda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilsin.

Bu çalışmaların araşdırılmasından sonra şagirdlərin diqqətini aşağıdakı üç təklifin ekvivalentliyinə cəlb etmək lazımdır:

1) $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; 2) $f(x)$-in qiymətləri $f(x_0)$-ın radiusu ε olan ətrafda yerləşir; 3) $f(x) \neq f(x_0)$, ε dəqiqliyi ilə şərh etdiyimiz belə hazırlıq mərhələsindən sonra limit və kəsilməzlik anlayışlarının daxil edilməsi üçün hazırlıq işinin kifayət etdiyini demək olar.

Qeyd edək ki, məktəb riyaziyyat kursunda funksiyanın kəsilməzliyi ya aralıqda, ya da aralıqların birləşməsində baxılır. Ona görə də kəsilməyən funksiyanın çox sadə əyani mənası var. $f(x)$ funksiyasının qrafiki $f(x_0)$ olduqda (yəni qrafik x_0 nöqtəsindən keçdikdə) karandaşı kağız üzərində axıra qədər çəkmək mümkündürsə, funksiya kəsilməyəndir. Kəsilməyən və kəsilməz olmayan funksiyalar arasında fərqli əlamətləri izah etmək üçün aşağıdakı analitik şəklə malik funksiyalara baxmaq kifayətdir.

1) $y = x + 1$; 2) $y = \frac{x^2-1}{x-1}$; 3) $y = \left|\frac{x^2-1}{x^3-1}\right|$, $x \neq 1$; 4) $y = \frac{|x|}{x}$

Göründüyü kimi, funksiyaların qrafikləri bir-birindən yalnız bir nöqtə ilə fərqlənir. Belə çalışmaların analizindən sonra şagirdlərə aşağıdakı məzmunda izahat vermək zəruridir.

1) Əgər $f(x)$ -in qrafiki x_0 nöqtəsində qırılmırsa, $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməyəndir;

2) $f(x)$ funksiyasının qrafiki x_0 nöqtəsində qırılırsa, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsiləndir;

3) Yuxarıda göstərilən funksiyalardan hansı $x = 1$ nöqtəsində kəsilir?;

4) $x = 1, x = 0$ nöqtəsində kəsilən funksiyaları misal göstərin;

5) Hər bir nöqtədə kəsilməyən funksiyaları misallarla göstərin.

Şagirdlər kəsilməzliyin əyani mənasını mənimsədikdən sonra növbəti məsələyə keçmək olar. Funksiyanın kəsilməzliyinin növbəti mərhələsinin öyrənilməsi müəyyən xarakterik xassələrin (*f(x)-f(x₀)*fərqinin $|x - x_0|$ fərqindən çox az meyil etməsi) izahının olmamasıdır. Bu xarakterik xassənin izahı bərabərsizliklə yanaşı həm də həyatı (praktiki) təbiətdə baş verən proseslərlə də əlaqələndirilməli və açıqlanmalıdır.

Şagirdlərə izah etmək lazımdır ki, praktikada, təbiətdə baş verən hadisələrdə, ümumiyyətlə, real proseslərdə kəmiyyətlərin dəyişməsi sıçrayışsız baş verir, yəni arqumentin çox kiçik dəyişməsinə funksiyanın çox kiçik dəyişməsi uyğun olur. Belə izahatdan sonra funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyini, xarakterik xassəsini bir qrafik üzərində əyani göstərmək lazımdır.

Məsələn, $y = \begin{cases} 2x^2 \ x \leq 1 \ olduqda \\ 1 - 2x \ x > 1 \ olduqda \end{cases}$

Funksiyanın qrafiki üzərində aşağıdakı məzmunda suallar müzakirə olunur:

1) *f*(2), *f*(3), *f*(0,25), *f*(1) nəyə bərabərdir?

2) Tutaq ki, *x*=2,0001 olduqda *f(x)*-in qiymətini necə hesablamalı?

Bu sualın cavabını düzgün bilmək üçün şagird verilmiş funksiyanın hansı analitik şəklindən istifadə edilməsini bilməlidir. Şagird cavab verdikdə ki, $f(2{,}001) \approx f(2)$-dır. Bu cavabla razılaşmaq lazımdır.

Çünki $|6^x - x_0| = 0{,}001$ olduqda $|f(2{,}001) - f(2)| = 2 \cdot 10^{-6}$ olur və deməli, $f(x) \approx 0{,}0001$ olduqda $f(2{,}001) \approx f(2)$ olur.

3) $x \approx 0{,}00001$ və ya $x \approx 0{,}999999$ olsun. *f(x)*-in qiymətini tapın. Aşkardır ki, *f(x)* kəsilməyən olduğundan $|2{,}00001 - 1{,}999999| \approx 0{,}00001$ və $f(0{,}00001) \approx 2 \cdot 10^{-8}$

4) $x = \frac{1}{3}$ olsun, onda *f(x)*-in qiyməti $f(\frac{1}{3})$ ola bilərmi?

Bütün bu sualların müzakirəsindən sonra kəsilməyən funksiyanın $x \approx x_0$ olduqda $f(x) \approx f(x_0)$ olur. Şagirdlər xarakterik xassəni mənimsəmiş olurlar.

Digər tərəfdən qarşıya qoyulan sualları $y = |x|$ və ya $y = \frac{|x|}{x}$ funksiyaları üçün qoyduqda şagirdlər dərhal görəcəklər ki, $x \approx x_0$ olduqda $f(x) \approx f(x_0)$ şərti bu funksiyalar üçün pozulur, çünki bu funksiyalar kəsilməzliyin xarakterik xassəsini ödəmirlər. Kəsilməzliyin xarakterik xassəsi mənimsənildikdən sonra funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyinə keçmək olur. Lakin bu halda ilkin olaraq ardıcıllığın limitinin tərifini yada salmaq lazımdır.

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ardıcıllığını bərabərsizlik şəklini misallar üzərində izah etmək lazımdır.

Yada salmaq lazımdır ki, ixtiyari müsbət ε-na görə elə N nömrəsi var ki, hər hansı nömrədən başlayaraq $n > N, |x_{n-a}| < \varepsilon$ olur. Bu bərabərsizlik göstərir ki, kifayət qədər böyük *n*-lər üçün $x_n \approx a$ bərabərsizliyi ε dəqiqliyi ilə doğrudur. Sonra isə $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ $(n > N)$ bərabərsizliyi ilə müqayisə etməklə $x \approx x_0$ olduqda $f(x) \approx f(x_0)$ münasibətini kəsilməzliyin limiti ilə analoqunu görürlər.

Doğrudan da $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində kəsilməzliyi elə funksiyanın bu nöqtədə limitinin varlığı deməkdir. Lakin bu limit başqa ədədə yox, funksiyanın x_0 nöqtəsindəki xüsusi qiymətinə bərabərdir, yəni $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ sonlu limiti var və $a = f(x_0)$ olduqda $f(x)$ funksiyası $x = x_0$ nöqtəsində kəsilməyəndir.

Bu izahatdan sonra $f(x)$ funksiyasının $x \to x_0$ olduqda limitini tapmağa aid bir neçə misal təklif etmək zəruridir: 1) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$; 2) $\lim_{x\to 2}(x^2 - x + 1)$; 3) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Nəhayət, müəllim limitin "$\varepsilon - \delta$" dilində tərifini şərh etdikdən sonra üç kvantor daxil olan bu tərifin dil konstruksiyalarını açıqlamaq üçün aşağıdakı kimi cədvəl üzərində izahat işi təşkil etmək məqsədəuyğundur. *a*-ədədi $n \to x_0$ olduqda o zaman $f(x)$ funksiyasının limiti adlanır ki, əgər:

ε-ixtiyari müsbət ədəd olduqda	İxtiyari müsbət ε üçün
x_0 − ın elə $\delta > 0$ nəticəsi var ki,	Elə müsbət δ ədədi tapmaq olar ki,
x-in bu ətrafındakı x_0-dan fərqli bütün qiymətləri üçün ε dəqiqliyi ilə $f(x) \approx a$	*x*-in $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ şərtini ödəyən bütün $x \neq x_0$ qiymətlərində $\lvert f(x) - a \rvert < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilsin

Limit və kəsilməzlik anlayışlarının tətbiq sahələrini nəzərdən keçirək.

Limit və kəsilməzlik anlayışları elə fundamental anlayışlardır ki, bu anlayışlar vasitəsilə riyaziyyatda çoxlu sayda müddəalar əsas-landırılır. Məsələn, elementar funksiyaların çoxlu sayda xassələri, tənlik və bərabərsizliklərin həllərinin varlığı və bu həllərin axtarılması üsulları, analizin sonrakı anlayışlarının daxil edilməsi və s. kimi mühüm tətbiqləri var.

Beləliklə, orta ümumtəhsil məktəblərinin riyaziyyat təlimində limit və kəsilməzlik anlayışlarının bir-birilə əlaqəli şəkildə şərh edilməsi və həlli yollarının geniş şəkildə şagirdlərə çatdırılması analizin ilkin məlumatlarının şagirdlər tərəfindən dərk edilməsi anlamına gəlir.

Problemin aktuallığı. Orta ümumtəhsil məktəblərinin riyaziyyat təlimində tətbiq edilən fənn kurikulumunu nəzərə alaraq limit və kəsilməzlik anlayışının fəndaxili anlayış əlaqələri əsasında tədrisi şagirdlərin nəzəri materialın dərindən dərk edilməsinə və təfəkkürün formalaşmasına müsbət təsir göstərir.

Problemin elmi yeniliyi. Riyaziyyat təlimində müasir təlim metodlardan istifadə edərək riyazi analiz elementlərinin öyrədilməsi şagirdlərin elmi-praktik vərdişlərinin yüksəldilməsinə, onların gələcək təhsillərini uğurla həyata keçirməsinə və yaxud mənimsəmənin optimallığını təmin etməyə imkan verir.

Problemin praktik əhəmiyyəti. Məqalə elementar riyaziyyat və riyaziyyatın tədrisi metodikasından mühazirə deyən və seminar məşğələləri aparan ali məktəb müəllimləri, orta məktəb müəllimləri, habelə tədqiqatçılar üçün faydalıdır.

Ədəbiyyat

1. Mərdanov M., Yaqubov M., Mirzəyev S. Cəbr və analizin başlanğıcı: X-XI siniflər üçün dərslik. Bakı, 2000.
2. Николский С.И. Математических анализ. М., 1973.
3. Далинер В.А. Внутрипредменое связи. М., 1990.

4. Гнеденко Б.В. Формирование мироворения учащихся в процесса обучения математике. М.: Просвещение, 1982.
5. Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: Вербум-м, 2003.
6. Богоявленский Д.И. Интеллектуальная активность как проблема творчества. Ростов на Дону, 1983.
7. Колмогоров в воспоминаниях / под.ред.А.Н.Ширяева. М., 1993.

E-mail: musa.rzayev.73@mail.ru
Rəyçilər: *ped.ü.fəls.dok.dos*. **B. Nəsirov**, *ped.ü.fəls.dok.* **C.N. Abdullayeva**
Redaksiyaya daxil olub: 08.10.2018.