UOT 37.01.

Mirvari Məhəbbət qızı Rüstəmova
Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

MƏKTƏB RİYAZİYYAT KURSUNDA VEKTORLARIN HASİLİNƏ DAİR BİLİKLƏRİN MƏNİMSƏNİLMƏSİ YOLLARI

Мирвари Махаббат гызы Рустамова
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

ПУТИ УСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ О ВЕКТОРНЫХ ПОНЯТИЯХ НА ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Mirvari Mahabbat Rustamova
Azerbaijan State Pedagogical University

WAYS TO MASTER THE KNOWLEDGE ON THE PRODUCTION OF VECTORS IN SCHOOL MATHEMATICS

Xülasə: Məqalədə məktəb riyaziyyat kursunun əsas bölmələrindən biri olan vektor anlayışı haqqında məlumat verilir. Müasir dövrün tələblərinə uyğun olaraq, fəndaxili və fənlərarası əlaqələrdən istifadə edərək vektorların skalyar hasilinə dair biliklər praktik çalışmalar üzərində şərh edilir.

Açar sözlər: *planimetriya, stereometriya, vektor, vektorial hasil, skalyar hasil, təklif və teorem, müstəvi, paraleloqram, istiqamət, komplanar, kolleniar*

Резюме: В статье представлена информация о векторном понятии, которое является одним из основных разделов на школьном курсе математики. Знание векторного понятия, используя внутренние и межпредметные отношения, комментируется на практических занятиях в соответствии с современным требованиям.

Ключевые слова: *планиметрия, стереометрия, вектор, векторное произведение, скалярное произведение, предложение и теорема, плоскость, параллелограмма, направление, компланар, коллинеар*

Summary: The article provides information on the vector concept, which is one of the main sections in school mathematics. The knowledge of the vector scalar production, using internal and interdisciplinary relationships, is interpreted in practical exercises in accordance with modern requirements.

Key words: *planimetry, stereometry, vector, vector product, scalar product, proposition and theorem, flatness, parallelogram, direction, complanar, collinear*

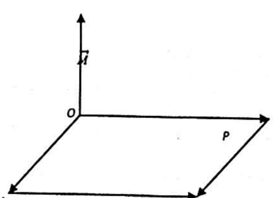
Son dövrlərə qədər məktəb riyaziyyat kursu iki hissədən ibarət olub, riyaziyyat və həndəsə bölmələrini təşkil edirdi. Həndəsə kursu da, öz növbəsində, iki yerə bölünürdü: planimetriya və stereometriya. Həndəsə kursunun hər iki bölməsində vektorlar haqqında şagirdlərdə mükəmməl təsəvvür formalaşdırılırdı. Təhsil sahəsində aparılan islahatlar, fənn kurikulumlarının fənlərə tətbiqi sayəsində riyaziyyat və həndəsə kursları birləşdirilərək "Riyaziyyat" adı altında ümumiləşdirilib. Bilirik ki, məktəb riyaziyyat kursu 5 (beş) məzmun xətti üzrə müəyyənləşdirilib. Məzmun xətlərinin fundamental bölmələrindən biri də "Həndəsə" məzmun xəttidir. "Həndəsə" məzmun xətti üzrə şagirdlərdə ibtidai siniflərdən başlayaraq həndəsi fiqurlar haqqında təsəvvürlər formalaşdırılır.

Təlim strategiyasının əsas istiqamətlərindən biri də öyrənilən materialın digər fənlərlə əlaqəli tədrisi əsas məsələlərdən biri kimi qarşıda duran vəzifədir. Məktəb riyaziyyat kursunda vektor anlayışının tədrisi prosesində üfüqi və şaquli əlaqələrdən geniş istifadə edilir. Vektorların öyrədilməsində fizika fənninə inteqrasiya bunu deməyə imkan verir. Digər tərəfdən, vektor anlayışının riyazi məsələlərin həllinə tətbiqi genişləndirilmişdir. Ənənəvi təlim prosesində bu məsələ triqonometrik funksiyaların öyrənilməsində nəzərə çarpırdı. Hal-hazırda məktəb riyaziyyat kursunda fəndaxili inteqrasiyadan istifadə edərək, VII sinifdən XI sinfə kimi praktik məsələlərin həllində vektorların tətbiqinə xüsusi üstünlük verilir. Bununla belə, vektorlara dair elə məsələlər vardır ki, vektorlar üzrə bilikləri nisbətən tamamlamaq üçün onların öyrənilməsinə ehtiyac var. Əlbəttə, biz riyaziyyatı nəzəri və praktik cəhətdən dərindən öyrənən məktəbləri və fakültətiv kursları nəzərdə tuturuq. İki vektorun vektorial hasili, üç vektorun qarışıq hasili, xassələri və onların həndəsə məsələlərinin ümumi şəkildə həllinə tətbiqləri və s. belə materiallardandır.

Belə vektorlara dair bir çox çalışmalar, anlayışlar, qanunauyğunluqlar və s. mövzunu dərindən öyrənməyə imkan verir, təklif və teoremlərin isbatlarını müasir tələblərə uyğun əyanilaşdirir və konkretləşdirir. Həmin məsələləri müvafiq siniflərdə vektorlar haqqındakı materialdan sonra tədris etmək olar.

Materialların öyrənilməsi ardıcıllığını təklif edirik.

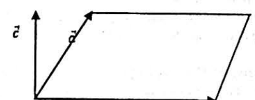
İki vektorun vektorial hasili. Hal-hazırda VII sinfin fizika kursundan məlumdur ki, tərpənməz 0 nöqtəsi ətrafında fırlanan cismə $\vec{F}$ qüvvəsi tətbiq olunursa, onun fırlanma təsirini $\vec{M}$ vektorial kəmiyyəti xarakterizə edir. Bu kəmiyyətə fizikada $\vec{F}$ qüvvəsinin 0 nöqtəsinə nəzərən qüvvə momenti deyilir.



Şəkil 1

Fırlanma oxundan qüvvənin təsiri xəttinə qədər olan məsafəni $|\overrightarrow{OA}|$ ilə işarə etsək, $|\overrightarrow{M}| = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{F}|$ yazmaq olar (şəkil 1). Başqa sözlə, momentin modulu ədədi qiymətcə $\overrightarrow{OA}$ və $\vec{F}$ vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsinə bərabərdir. Digər tərəfdən, $\vec{M}$ moment vektoru 0 nöqtəsi ilə $\vec{F}$ vektorundan keçən P müstəvisinə perpendikulyardır və elə yönəlir ki, bu halda $\vec{F}$ qüvvəsinin təsiri ilə cisim saat əqrəbi hərəkətinin əksinə fırlanır. Onda deyirlər ki, $\vec{M}$ qüvvə momenti vektoru $\overrightarrow{OA}$ vektorunun $\vec{F}$ vektoruna vektorial hasilidir və belə işarə olunur: $|\vec{M}| = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\vec{F}|$.

Tərif. İxtiyari iki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorunun *vektorial hasili* $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ aşağıdakı iki şərti ödəyən $\vec{c}$ vektoruna deyilir (şəkil 2).



Şəkil 2 $\vec{b}$

1) $\vec{c}$ vektorunun uzunluğu $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üzərində qurulmuş paraleloqramın sahəsinə bərabərdir: $\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}|sin\varphi, \varphi = (\vec{a}, \vec{b})$.

2) $\vec{c}$ vektoru $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının təyin etdiyi müstəviyə perpendikulyar olmaqla elə yönəlsin ki, $\vec{c}$ vektorunun uc nöqtəsindən baxmaqla, $\vec{a}$ vektorunu $\vec{b}$ vektoru üzərinə gətirmək üçün ən kiçik bucaq qədər fırlanma saat əqrəbi hərəkətinin əksinə alınsın.

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardısa, onda tərifə görə $\vec{a} \times \vec{b}$=*0* olur.

Vektorial hasilin aşağıdakı xassələri vardır:

a) Vektorial hasil kommutativlik (yerdəyişmə) xassəsinə tabe deyildir:

$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ ..... **(1)**

Doğrudan da, $(\vec{a} \times \vec{b})$ və $(\vec{b} \times \vec{a})$ vektorlarının modulları bərabərdir, həmçinin hər iki vektor $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının təyin etdiyi müstəviyə perpendikulyardır. Deməli, $(\vec{a} \times \vec{b})$ ilə $(\vec{b} \times \vec{a})$ vektorları kollineardır. Lakin onların istiqaməti bir-birinin əksinədir. Ona görə $-(\vec{b} \times \vec{a})$ vektoru ilə $(\vec{a} \times \vec{b})$ vektoru eyni istiqamətlidir. Bu isə göstərir ki, *(1)* bərabərliyi doğrudur.

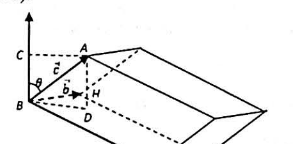
b) Ədədi vuruğu vektorial hasil işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

Doğrudan da, paraleloqramın bir tərəfinin istiqamətini dəyişmədən γ dəfə uzatsaq, alınan yeni paraleloqramın sahəsi əvvəlkindən γ dəfə fərqlənəcəkdir.

c) Vektorial hasil distributivlik (paylama) xassəsinə malikdir: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$. Bu xassəni isbat etmək üçün aşağıdakı anlayışı verək.

Üç vektorun qarışıq hasili.

Tərif. İxtiyari üç $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının birinci ikisinin $(\vec{a} \times \vec{b})$ vektorial hasilinin üçüncü $\vec{c}$ vektoruna skalyar hasilinə yəni $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ ifadəsinə həmin vektorların qarışıq hasili deyilir (şəkil 3).



Şəkil 3

Teorem. Komplanar olmayan ixtiyari $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları qarışıq hasilinin modulu, həmin vektorlar üzərində qurulmuş paralelepipedin həcminə bərabərdir.

İsbatı. $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üzərində paralelepiped quraq. Onun oturacağı paraleloqram olduğundan $|\vec{d}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \times |\vec{b}| sin\varphi$ qurulan paralelepipedin oturacağının sahəsidir. Digər tərəfdən, ΔABC-dən $\vec{H} = |\vec{c}|cos\theta$. Onda paralelepipedin həcmi:

$V = |\vec{d}| \cdot \vec{H} = |\vec{d}| \cdot ccos\theta = |\vec{d} \cdot \vec{c}| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}|$

olur.

Qarışıq hasilin bir sıra xassələri vardır:

a) İxtiyari üç vektorun qarışıq hasilinin 0-a bərabər olması üçün bu vektorların komplanar olması həm zəruri, həm də kafidir.

İsbatı. Şərt zəruridir. Tutaq ki, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = 0$.

Yəni:

$|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}| = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times |\vec{c}| sin\varphi \cdot cos\theta = 0$

. Bu bərabərlik, vektorlardan, heç olmasa, biri 0-a bərabər olduqda $\vec{a}, \vec{b}$ vektorları kolleniar və $\vec{c} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$ olduqda mümkündür. Deməli, $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanardır.

Şərtin kafiliyi isə oxşar qayda ilə isbat olunur. Qarışıq hasil üçün aşağıdakı xassələrin də doğruluğunu göstərmək olar:

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{c} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = -\vec{a} \times (\vec{c} \times \vec{b})$

.

c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\gamma_1 \vec{c_1} + \gamma_2 \vec{c_2}) = \gamma_1 \times (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c_1} + \gamma_2 \times (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c_2}$

.

İndi də iki vektorun vektorial hasili üçün distrubituvlik xassəsinin doğruluğunu göstərək.

$\vec{d}$ istənilən vektor olduqda:

(

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}) \times \vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{c}) \times \vec{d} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{d} =$

$\vec{d}$

$$= \left((\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})\right) \times$$

alınır, yəni $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Nəhayət, vektorial və qarışıq hasilin koordinatlarla ifadəsini verək. Vektorial hasilin tərifinə görə *i, j* və *k* orta vektorları düzbucaqlı bazis təşkil edərsə, $\vec{i} \times \vec{i} = 0, \vec{j} \times \vec{j} = 0, \vec{k} \times \vec{k} = 0$, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ olduğunu alarıq. Onda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının $\vec{i}, \vec{j}$ və $\vec{k}$ bazisi üzrə ayrılışı $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = (x_1 + y_1 + z_1)$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_2 + y_2 + z_2)$, olduğundan, $(\vec{a} \times \vec{b})$ vektorial hasilin koordinatlarla ifadəsi aşağıdakı şəkildə olar:

Həmçinin, üç vektorun qarışıq hasilinin koordinatlarla ifadəsi belədir:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = x_3(y_1z_2 - z_1y_2) \cdot$$
$$+ y_3(z_1x_2 - x_1z_2) + z_3(x_1y_2 - y_1x_2)$$

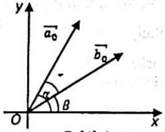
Yeri gəlmişkən, qeyd edək ki, $\cos(\alpha \pm \beta)$ triqonometrik funksiyası üçün toplama düsturunun çıxarılışı şagirdlər tərəfindən çətin dərk edilir. Lakin ixtiyari iki vektorun skalyar hasilinin koordinatlarla ifadəsindən istifadə etməklə bu məsələni daha asan isbat etmək olar. Bunun üçün *XOY* müstəvisi üzərində ortaq *O* başlanğıclı $\overrightarrow{a_0}$ və $\overrightarrow{b_0}$ kimi orta vektorları qeyd etmək kifayətdir. $\overrightarrow{a_0}$ vektorunun Ox oxunun müsbət istiqamətilə əmələ gətirdiyi bucağı α, $\overrightarrow{b_0}$ vektorunun bucağını isə β ilə işarə etsək (şəkil 4), aşağıdakı ifadəni yazarıq: $\overrightarrow{a_0} = (sin\alpha, cos\alpha)$, $\overrightarrow{b_0} = (sin\beta, cos\beta)$.

Digər tərəfdən, $\varphi = (\overrightarrow{a_0}, \overrightarrow{b_0})$ olarsa, onda $\overrightarrow{a_0}$ və $\overrightarrow{b_0}$ vektorlarının skalyar hasilinin tərifini və koordinatlarla ifadəsini nəzərə alsaq,

$$cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta = \overrightarrow{a_0} \cdot \overrightarrow{b_0} = |\overrightarrow{a_0}| \cdot |\overrightarrow{b_0}| cos\varphi = cos(\alpha - \beta)$$

olur.

Başqa triqonometrik funksiyaların arqumentləri cəmi ilə fərqini göstərən düsturlar isə triqonometrik funksiyaların tək və cütlüyü, həmçinin çevirmə düsturlarının köməyi ilə tapılır.



Şəkil 4

Deməli, məktəb riyaziyyat kursunda düzgün metodikanın seçilməsi həm mövzunun öyrənilməsində, həm də praktik çalışmaların həllində şagirdlərə yaxından kömək edir. Fənn müəllimləri mövzunu tədris edərkən hansı metoddan istifadə edəcəyini əvvəlcədən müəyyənləşdirməlidir. Kortəbii şəkildə müəyyən edilmiş metod təlimin keyfiyyətini aşağı salır.

Problemin elmi yeniliyi ondan ibarətdir ki, müasir dövrün tələblərinə uyğun olaraq, fəndaxili, fənlərarası və təlim metodlarından istifadə edilərək mövzu şərh edilmişdir.

Problemin aktuallığı. "Həndəsə" məzmun xəttinə uyğun alt məzmun xətlərindən birini də vektor və onun tədrisi metodikası təşkil edir. Bu nöqteyi-nəzərdən məqalə şagirdlərin ümumi inkişaf səviyyəsinin yüksəldilməsi üçün aktualdır.

Problemin praktik əhəmiyyəti. Hər bir nəzəri materialın tədrisi prosesində praktik çalışmalardan istifadə edilməlidir. Çünki praktik çalışmaların həllində nəzəri material müstəqil şəkildə qavranılır.

Ədəbiyyat:

1. Əsgərov K.S., Adıgözəlov A.S., Məmmədov A.A. Həndəsədən məsələ həlli praktikumu: Dərs vəsaiti. Bakı: V.İ. Lenin adına APİ, 1986.
2. Əsgərov K.S., Axundov S.S. Elementar həndəsə. Bakı: APİ, 1974.
3. Klopskiy V.M. və b. Həndəsə: orta məktəbin 9-11 sinifləri üçün dərslik / Z.A. Skopetsin redaktəsi ilə. Bakı: Maarif, 1991.
4. Mərdanov M.C. və b. Həndəsə: orta məktəbin 7-11 sinifləri üçün dərslik / prof. S. Mirzəyevin redaktorluğu ilə. Bakı: Çaşıoğlu, 2008.
5. Poqorelov A.V. Həndəsə: Orta məktəbin 7-11 sinifləri üçün dərslik. Bakı: Maarif, 1991.
6. Литвиненко В.Н. "Сборник задач по стереометрии с методами решений". Пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1998.

E-mail: mirvariska@gmail.com
Rəyçi: *ped.ü.elm.dok., prof.* **A.S. Adıgözəlov**
Redaksiyaya daxil olub: 05.12.2018