UOT 1949 A 452 Y

A.N. ƏLİYEVA, N. Q. BAYRAMOVA, E. X. MƏMMƏDOV

Heydər Əliyev adına AAHM

YÜKLƏNMİŞ KEÇİRİCİ ELLİPSOİD FORMALI SƏTHİN YARATDIĞI SAHƏNİN POTENSİALININ HESABLANMASI

Məqalədə yüklənmiş keçirici ellipsoid formalı səthin yaratdığı sahənin potensialının riyazi yolla hesablanmasından bəhs olunur.

Məsələnin fiziki qoyuluşu: Elektostatik sahə potensiallı sahədir. Belə sahədə yerləşən q_0 yükünün potensial enerjisi hər bir yükün ayrılıqda yaratdıqları potensial enerjilərin cəminə bərabər olur:

$$W_p = \sum_{i=1}^{n} W_i = q_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} \tag{1}$$

Bu düsturdan görünür ki, $\frac{W_p}{q_0}$ nisbəti q_0 yükündən asılı deyil. Bu nisbət elektrostatik sahənin energetik xarakteristikasıdır və **sahənin potensialı** adlanır.

Əgər sahə n sayda yük tərəfindən yaranarsa, onda potensial ayrı-ayrı sahələrin potensiallarının cəbri cəminə bərabərdir və aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} \tag{2}$$

Mənbələrdə "Bərabər yüklənmiş sonsuz müstəvinin", "Bərabər yüklənmiş sferik səthin", "Müxtəlifişarəli yüklənmiş iki sonsuz paralel müstəvinin", "Həcmi yüklənmiş kürənin"," Bərabər yüklənmiş sonsuz silindrin"yaratdığı sahədə potensialın dəyişməsinin tapılmasına baxılır [1].

Lakin yüklənmiş kecirici ellipsoid formalı səthin yaratdığı sahədə potensialın riyazı yolla hesablanmasından bəhs olunmur.

Məsələnin riyazi həlli. Ellipsoid ikitərtibli səthlərə aiddir. Onun kanonik tənliyi aşağıdakı şəkildədir:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3}$$

Tutaq ki, $u(x,y,z)$ funksiyası

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1 \tag{4}$$

tənliyi ilə təyin olunan qeyri-aşkar funksiyadır. Belə ki, burada $a \geq b \geq c > 0$, $u(x,y,z) = const$ eyni fokuslu ikinci tərtib səthlər ailəsinin tənliyini ifadə edir.

$c^2 + u > 0$ şərti ellipsoidlər ailəsinə, $b^2 + u > 0,\ c^2 + u < 0$ olduqda biroyuqlu hiperboloidlər ailəsinə, $a^2 + u > 0,\ b^2 + u < 0,\ c^2 + u < 0$ olduqda isə ikioyuqlu hiperboloidlər ailəsinə çevrilir [2].

F_n işarəsini daxil edək: $$F_n = \frac{x^2}{(a^2+u)^n} + \frac{y^2}{(b^2+u)^n} + \frac{z^2}{(c^2+u)^n}$$

x – ə görə (4) tənliyinin birinci və ikinci tərtib xüsusi törəməsi:

$$\frac{2x}{a^2+u} - F_2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{(a^2+u)\cdot F_2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{(a^2+u)\cdot F_2} - \frac{2x}{(a^2+u)^2\cdot F_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2x}{(a^2+u)F_2^2}\left[\frac{2x}{(a^2+u)} - 2F_3\frac{\partial u}{\partial x}\right] =$$

$$=\frac{2}{(a^2+u)\cdot F_2}-\frac{8x^2}{(a^2+u)^3\cdot F_2^2}+\frac{8F_3x^2}{(a^2+u)^2\cdot F_2^3} \quad (5)$$ verir.

Analoji olaraq y və z dəyişənlərinə görə birinci və ikinci tərtib xüsusi törəməsi:

$$\frac{2y}{b^2+u}-F_2\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{(b^2+u)\cdot F_2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2}{(b^2+u)\cdot F_2}-\frac{8y^2}{(b^2+u)^3F_2^2}+\frac{8F_3y^2}{(b^2+u)^2F_3^2} \quad (6)$$

və

$$\frac{2z}{c^2+u}-F_2\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{(c^2+u)\cdot F_2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2}{(c^2+u)\cdot F_2}-\frac{8z^2}{(c^2+u)^3F_2^2}+\frac{8F_3z^2}{(c^2+u)^2F_3^2} \quad (7)$$ olar [3].

Qradiyentə keçsək, onda potensialın dəyişməsi üçün Laplas tənliyinə görə

$$\Delta\varphi=\varphi''(gradu)^2+\varphi'\Delta u,$$

alarıq. Burada $\Delta\varphi$ potensialın dəyişməsi, φ' və φ'' isə onun xüsusi törəməsidir.

Ekvipotensiallı səthlər üçün $\Delta\varphi=0$ olduğundan, onda axırıncı bərabərlikdən taparıq:

$$\frac{\Delta u}{(qradu)^2}=-\frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)}$$

Beləliklə, ekvipotensial səthlər üçün $\frac{\Delta u}{(grad\,u)^2}=F(u)$ şərti və ya $\frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)}=-F(u)$ şərti ödənir. Əgər $F(u)$ funksiyası məlumdursa,onda φ potensialını tapmaq olar:

$$F(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+u}+\frac{1}{b^2+u}+\frac{1}{c^2+u}\right) \quad (8)$$

$\frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)}=-F(u)$ olduğunu (8) bərabərliyində nəzərə alsaq və hər tərəfi (-1)–ə vursaq, olar:

$$\frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+u}+\frac{1}{b^2+u}+\frac{1}{c^2+u}\right) \quad (9)$$

İndi fərz edək ki, (9) tənliyinin sağ tərəfindəki dəyişənlərin hamısı müsbətdir. Onda $u=0$ şərtində ellipsoidin (3) tənliyi alınır. $\varphi(x,y,z)$ potensialını (9) tənliyindən təyin edə bilərik. Bu tənliyi inteqrallasaq $\varphi'(u)=A\left[(a^2+u)\cdot(b^2+u)\cdot(c^2+u)\right]^{-\frac{1}{2}}$ burada $A-$ inteqrallama sabitidir. İkinci dəfə inteqrallasaq və nöqtədən sonsuz uzaqlıqda potensialı sıfır qəbul etsək alarıq:

$$\varphi(u)=A\int_{\infty}^{u}\left[(a^2+u)\cdot(b^2+u)\cdot(c^2+u)\right]^{-\frac{3}{2}}\cdot du \quad (10)$$

Nöqtəvi yük üçün vakuumda $\varphi=\frac{q}{r}$ olduğu məlumdursa, u-nin böyük qiymətlərində (4) şərtini ödəyən ellipsoid kürəyə çevrilir və $r=\sqrt{u}$ olur. Onda

(10) inteqralını aşağıdakı şəkildə yazmaq olar: $\varphi(u)=A\int_{\infty}^{u}u^{-\frac{3}{2}}\cdot du=-2Au^{-\frac{1}{2}}=-\frac{2A}{\sqrt{u}}=-\frac{2A}{r}$

Deməli,
$$\varphi=\frac{q}{2}\int_{u}^{\infty}\left[(a^2+u)\cdot(b^2+u)\cdot(c^2+u)\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot du \quad (11)$$

Bura daxil olan inteqral elliptikdir və $b=c$ şərtində

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \frac{\sqrt{b^2+u}}{\sqrt{a^2+u}-\sqrt{a^2-b^2}} \qquad (12)$$

(12) tənliyinə

$$A = \sqrt{a^2+u} \text{ və } f = \sqrt{a^2-b^2}$$

əvəzləməsini daxil edək. 2A kəmiyyəti ekvipotensial ellipsoidin böyük oxunun uzunluğu, 2f baxılan ellipsoidin fokusları arasındakı məsafədir. Onda (13) bərabərliyini yazmaq olar:

$$\varphi = \frac{q}{2f} \ln \frac{A+f}{A-f} \qquad (13)$$

$a=b$ şərtində (12) bərabərliyindən

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{a^2-c^2}} arctg \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{u+c^2}} \qquad (14)$$ taparıq.

$2B = 2\sqrt{c^2+u}$ və $2f = 2\sqrt{a^2-c^2}$ əvəzləmələrini daxil etsək,onda

$$\varphi = \frac{q}{f} arctg \frac{f}{B} \qquad (15)$$ alarıq.

Burada $2B$ – kəmiyyəti ekvipotensial ellipsoidin kiçik oxunun uzunluğu, $2f$ –isə fokusları arasındakı məsafədir [3].

Göründüyü kimi, elektrik sahəsini həm vektorial kəmiyyət $\vec{E}$ sahə intensivliyi, həm də skalyar kəmiyyət olan φ potensialı ilə təsvir etmək mümkündür. Sahə intensivliyi elektrostatik sahənin güc xarakteristikasıdır. $\vec{E}$ vektorunun modulu φ –nin uzunluğa görə dəyişməsini təyin edir.

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l} = -(grad\varphi) \qquad (16)$$

Bu ifadə vektor şəklində aşağıdakı kimi yazılır:

$$\vec{E} = -\left[\vec{i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right] = -grad\varphi \qquad (17)$$

Burada $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -koordinat oxları üzrə vahid (ort) vektorlardır. Deməli, elektrostatik sahənin potensialının qradiyenti əks işarə ilə sahə intensivliyinə bərabərdir. İntensivlik vektoru həmişə potensalın azalması istiqamətində yönəlmişdir və ya əksinə [4].

NƏTİCƏ

Yüklənmiş keçirici ellipsoid formalı səthin yaratdığı sahədə potensialı $\varphi = \frac{q}{2f} \ln \frac{A+f}{A-f}$ və $\varphi = \frac{q}{f} arctg \frac{f}{B}$ düsturları ilə hesablamaq olar.

ƏDƏBİYYAT

1.Ə.D.Namazov, R.B.Vəliyev Ümumi fizika. Bakı: "Hərbi nəşriyyat", 2013. 445 s.
2.S.Ə.Veysova Ali riyaziyyat, 1–ci hissə. Bakı: "Hərbi nəşriyyat", 2013. 511 s.
3.Сивухин Д.В., Общий курс физики (Электричество). М.: "Наука", 1983. 687 с.
4.N.M.Mehdiyev Fizika kursu. Bakı: "ADNA–nın nəşriyyatı", 2012.600 s.