UOT 1980 M 562 T

F. H. MİRZƏYEV

Heydər Əliyev adına AAHM

TƏSADÜFİ FUNKSİYALAR NƏZƏRİYYƏSİNİN TƏTBİQİ MƏSƏLƏSİNİN ÜMUMİ SƏCİYYƏSİ

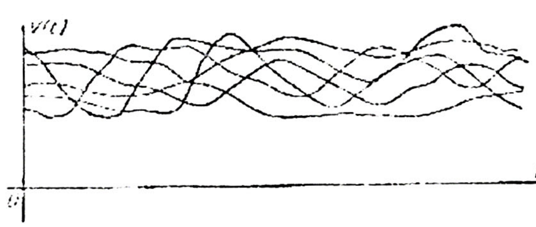
Məqalədə təsadüfi funksiyalar nəzəriyyəsinin yaranması, inkişafı, onun nəzəri və praktiki məsələlərin həllində tətbiqi misallarla araşdırılır.

Təsadüfi funksiyalar nəzəriyyəsinin tətbiqi ilə həll olunan məsələlərin səciyyəsi əsasında ehtimal nəzəriyyəsinin yaranması və inkişafı və ya sınaq nəticəsində alınan təsadüfi hadisələrin baş vermə ehtimalının hesablanması, həmçinin, təsadüfi kəmiyyətlərin tədqiqi ilə bağlı aparılan araşdırmaların dayandığı bir elmin təşəkkülünün təhlilidir.

Başqa sözlə, ehtimal nəzəriyyəsinin əsası XVII əsrdə (Paskal, Ferma, Hügensin) qoyulmuş, XVIII əsrin başlanğıcında Y. Bernulli tərəfindən birinci limit teoremi verildikdən sonra məlum məntiqi nəticə qazanmışdır. Lakin XIX əsrin ortalarından başlayaraq elm və texnika ehtimal nəzəriyyəsi qarşısında elə yeni məsələlər qoymuşdur ki, onların həlli təsadüfi hadisələrin ehtimallarının hesablanması bazasında mümkün ola bilərdi. Beləliklə, təsadüfi X(t) funksiyası öz arqumentinin elə funksiyasına deyilir ki, onun qiyməti (t) arqumentinin istənilən qiymətində təsadüfi kəmiyyətdir; (t) arqumenti təsadüfi kəmiyyət deyildir. Məsələn, radiolokatorla təyin olunan hədəflərin cari koordinatları, ölçmənin qaçılmaz xətaları səbəbindən zamanın funksiyalarıdır.

Təsadüfi funksiyanın arqumenti zaman və ya digər kəsilməz arqument ola bilər. Məsələn, bombardmançı təyyarə özünün döyüş kursunda nəzəri olaraq sabit sayılan uçuş sürətinə malikdirsə, faktiki onun sürəti orta nominal qiymət ətrafında təbəddülatdadır və zamanın təsadüfi funksiyasıdır [1].

Bir neçə uçuşda isə təsadüfi $V(t)$ funksiyalarının reallaşdırmalarının ailəsi alınır (şəkil1).



Şəkil 1

X(t) təsadüfi funksiyasının analizində aparılan (n) asılı olmayan sınaqda alınan funksional asılılıqlar X(t) təsadüfi funksiyasının realizasiyası adlanır. Bu realizasiyalar göstərir ki, təsadüfi funksiya tamamilə fərqli xassələrə malikdir. Təsadüfi funksiyalar aparatının cəlb olunmasını tələb edən, praktik maraq doğuran məsələləri üç qrupa bölmək olar:

-prosesin bu və ya digər ehtimali xarakteristikasının təyini;

-eksperimental nəticələrə görə təsadüfi funksiyaların ehtimali xarakteristikalarının təyini;

-müəyyən riyazi əməliyyatların tətbiqində alınan təsadüfi funksiyaların ehtimali xassələrinin təyini; Bu tip müxtəlif dinamik sistemlərin (avtomatik tənzimlənmə məsələləri və s.) işi ilə əlaqəli məsələlər texnikada geniş yayılmışdır. Məsələn, qeyri-müntəzəm dalğalanmada gəminin tərzi-halının təyinində onun həndəsi və mexaniki xüsusiyyətlərinin məlum sayıldığı məsələni nümunə göstərmək olar. Qeyd olunan məsələlərin həllində, hər şeydən əvvəl, təsadüfi funksiyaların ümumi xüsusiyyətlərini müəyyən etmək zərurəti yaranır.

Beləliklə, təsadüfi kəmiyyətlər nəzəriyyəsinin, bilavasitə, praktik maraq kəsb edən cəhətləri, onların realizasiyalarına görə ehtimali xarakteristikalarının təyini metodlarını vermək və təsadüfi kəmiyyətlərin müxtəlif dinamik sistemlərə təsirini müəyyən etmək məqsədilə, yaxud bu sistemin optimal parametrlərini seçməyə imkan verən üsulların şərh edilməsindədir. Bu məsələlr üçün xarakterik cəhət onların həllində, ən sadə halda, təsadüfi funksiyaların ikinci tərtib momentlərinin məlum olmasıdır. Riyazi nöqteyi-nəzərdən bu tip məsələlər, adətən, diferensial tənliklər sistemi həllini təyin etməyə gətirilir. Bu sistemə qeyri-təsadüfi əmsallarla bərabər, xarakteristikaları məlum qəbul edilən zaman funksiyaları da daxildir. Təsadüfi funksiyalar öz arqumentinin kəsilməz funksiyasıdır- dedikdə, kiçik zaman kəsimində prosesin ordinatı sezilən artımı çox kiçik ehtimalla alınan kimi başa düşülə bilər. X(t) prosesinin ehtimala görə kəsilməzliyi istənilən ε üçün (ε >0)

$$\lim_{\Delta\to 0} P\{|X(t+\Delta) - X(t)| \geq \varepsilon\} = 0$$

şərti ilə müəyyən olunur. Bununla yanaşı, orta kvadratik kəsilməzlik anlayışı da istifadə olunur. Sonsuz sayda momentlərdən təsadüfi funksiyanın xarakteristikası nöqteyi-nəzərdən birinci və ikinci tərtib mərkəzi momentlər götürülür. Təsadüfi funksiyaların xarakteristikası, ümumi halda, ədəd deyil, $m_x(t)$ funksiyasıdır (şəkil 2):

Şəkil 2

$$m_x(t) = \overline{X(t)} = M[X(t)] \quad (1)$$

təsadüfi funksiyanın ordinatının istənilən zaman anında riyazi gözləməsidir.

Məlum olduğu kimi,

$$\mathrm{D}[X(t)] = M\left[X(t) - \overline{X(t)}\right]^2 \quad (2)$$

təsadüfi X(t) funksiyasının dispersiyasıdır

$$K(t_1;t_2) = M\{[X(t_1) - \overline{X(t_1)}][X(t_2) - \overline{X(t_2)}]\} \quad (3)$$

isə $X(t_1)$və $X(t_2)$-nin korrelyasiya funksiyasıdır. Təsadüfi kəmiyyətlər sistemi üçün də analoji olaraq momentlər hesablana bilər, amma bu halda inteqrallamanın tərtibi artır. Məsələn, X və Y təsadüfi kəmiyyətləri üçün korrelyasiya momenti

$$K_{xy} = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})(y-\bar{y}) f(x;y)\,dxdy \quad (4)$$

şəklindədir [1]. Paylanma və ehtimal sıxlığı funksiyalarından əlavə təsadüfi kəmiyyətin və ya təsadüfi kəmiyyətlər sisteminin vacib xarakteristikası, həm də, xarakteristik funksiyadır. Bir təsadüfi kəmiyyət üçün bu

$$E(u) = M\left[e^{iux}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f(x)\,dx \quad (5)$$

kimidir. Xarakteristik funksiyanın tətbiq üstünlüyü ondadır ki, təsadüfi kəmiyyətlərin bütün momentləri (əgər onlar varsa) diferensiallama yolu ilə xarakteristik funksiyadan alına bilər. Məsələn, əks Furye çevrilməsini tətbiq etməklə ehtimal sıxlığını almaq olar:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} E(u)\,du \quad (6)$$

Bir çox məsələlərin həllində hesabatı sadələşdirmək üçün həqiqi (t) dəyişəninin ordinatı kompleks kəmiyyətlər olan təsadüfi funksiyalar daxil edilir. Onda,

$$X(t) = U(t) + i\,V(t) \quad (7)$$

olar ki, burada U(t) və V(t) həqiqi təsadüfi kəmiyyətlərdir [2]. Misal nümunələrinə baxaq:

Misal 1. $X(t) = A \cdot e^{i\mu t}$; burada μ- qeyri-təsadüfi həqiqi parametr, A-riyazi gözləməsi sıfır olan kompleks təsadüfi kəmiyyətdir. X(t)-in korrelyasiya funksiyasının kompleks olduğunu göstərin:

$$K(t_1;t_2) = M\left\{\left[X^*(t_1) - \overline{x^*}(t_1)\right]\left[X(t_2) - \overline{x(t_2)}\right]\right\} \quad (8)$$

olduğundan (burada $X(t)$korrelyasiya funksiyası $X^*(t_1)$ və $X(t_2)$ təsadüfi kəmiyyətlərinin ikinci qarışıq mərkəzi momenti olaraq təyin olunmuşdur ki, (*) qoşma kompleks kəmiyyətin işarəsidir) $t_1 = t_2$ götürüldükdə $K(t_1;t_1) = M\left\{\left[X(t_1) - \overline{x(t_1)}\right]^2\right\}$ alınır.

$$\overline{x(t)} = \mathrm{M}[A]e^{i\mu t} = 0$$

və

$$K(t_1;t_2) = M\{A^* e^{-i\mu t_1} A \cdot e^{i\mu t_2}\} = \mathrm{M}\{|A|^2\}[\cos\mu(t_2-t_1) + i\sin\mu(t_2-t_1)]$$

Olar ki, bu kompleks ifadədir.

Təsadüfi funksiyanın ən vacib xassəsi- xüsusi tədqiqat metodlarının tətbiqi mümkünlüyünü müəyyən edən, təsadüfi funksiyanın zamanın hesabat başlanğıcından asılı olub-olmaması ilə bağlı olan xassəsidir. Buna uyğun stasionar və qeyri-stasionar təsadüfi funksiyalar fərqlənir. Təsadüfi X(t) funksiyası geniş mənada o halda stasionar adlanır ki, onun riyazi gözləməsi və dispersiyası sabitdir, korrelyasiya funksiyası isə ancaq zaman momentlərinin fərqindən asılıdır (t-in zaman qismində baxılması şərti xarakter daşıyır, yəni təsadüfi funksiyanın arqumenti başqa fiziki təbiətli ola bilər). Təsadüfi funksiya stasionarlıq xassəsinə malikdirsə (geniş mənada), korrelyasiya funksiyası bir $\tau = t_2 - t_1$ arqumentinin funksiyası olur. [3]

Misal 2. Gəminin θ(t) əyilmə (kren) bucağının korrelyasiya funksiyası

$$K_\theta(\tau) = \sigma_\theta{}^2 . e^{-\alpha|\tau|}(\cos\beta|\tau| + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|)$$

düsturu ilə təyin olunur [3]. Yırğalanma prosesini normal hesab edərək,

$$\sigma_\theta{}^2 = 100d\partial r.^2;\ \alpha = 0{,}1\frac{1}{san.};\ \beta = 0{,}7\frac{1}{san.}$$

olduqda T=20dəq. hərəkət ərzində əyilmə (kren) bucağının ±25° həddindən çıxma sayını tapın.

$$\sigma_v{}^2 = K_\theta(0) = -\frac{d^2K_\theta(\tau)}{d\tau^2}/_{\tau=0} = \sigma_\theta{}^2(\alpha^2+\beta^2)$$

təyin edirik. Axtarılan atılmalar sayı $n_a = 2T\nu_a$, burada 2 əmsalı ona görədir ki, $a = 25°$ səviyyəsindən aşağıdan yuxarıya atılmalar kimi, $-a$ səviyyəsində yuxarıdan aşağı atılmaları da nəzərə almaq lazımdır. Ehtimalın $p\left(\frac{a}{t}\right) = p(a)$ zaman sıxlığında nəzərə alınaraq, orta atılma qiyməti məlum

$$\nu_a = p(a) = \frac{\sigma_v}{2\pi\sigma_x}e^{-\frac{(a-x)^2}{\sigma x^2}} \qquad [1]$$

düsturuna əsasən məsələnin şərti yerinə yazıldıqda

$$n_a = 2T\frac{\sigma_{\dot\theta}}{\sigma_\theta 2\pi}e^{-\frac{a^2}{2\sigma_\theta{}^2}} = 2T\frac{\sqrt{\sigma_\theta{}^2(\alpha^2+\beta^2}}{2\pi\sigma_\theta}e^{-\frac{a^2}{2\sigma_\theta{}^2}} = \frac{120\cdot\sqrt{50}}{\pi}e^{-3{,}125} = 11{,}9$$

alınır.

Baxılan sadə misal nümunələri ehtimal nəzəriyyəsi metodlarının və ciddi riyazi üsullarla yanaşı təsadüfi funksiyaların tətbiqi üsullarının da səmərəli olduğunu və korrelyasiya nəzəriyyəsi çərçivəsində mümkünlüyünü ifadə edir.

NƏTİCƏLƏR

1.Bu nəzəriyyə daha çox hərbi ixtisaslı mühəndislərin riyazi biliklərinin təkmilləşdirilməsi baxımından öz aktuallığını saxlayır.

2.Elmin müasir inkişaf səviyyəsi, klassik üsullarla bərabər təsadüfi hadisələr və onları tədqiq etməyə imkan verən yeni təsadüfi funksiyalar nəzəriyyəsinə əsaslanan riyazi aparatın cəlb olunmasını zəruri edir.

3.Təsadüfi funksiyalar nəzəriyyəsi tətbiqi xarakterdə olduğundan, onlara marağın artırılması ümumnəzəri diqqəti cəlb etmək və bu istiqamətə yönəltmək nöqteyi-nəzərindən məqsədəuyğundur.

ƏDƏBİYYAT

1.Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: "Наука", 1989.

2.Гнеденко Б.В.Курс теории вероятностей. М.: "Физ-Мат.Литература". 1987.

3.Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: "Физматгиз", 1988.