UOT1924 V 397 B

S. Ə. VEYSOVA, f. r. e. n.; S. T. PAŞAYEVA, f. r. e. n.; M.Ə. RƏSULOVA

Heydər Əliyev adına Azərbaycan Ali Hərbi Məktəbi
E-mail: seltenet.veysova@mail.ru

BİRİNCİ TƏRTİB DİFERENSİAL TƏNLİYİN YARIMİNTERVALDA HƏLLİNİN DAVAMLILIĞI

Məqalədə adi diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin yarımaçıq intervalda davam edilməyən həllinin varlığı, bu intervalı özündə saxlayan oblastda həllin sonsuzluğa yaxınlaşması, davamedilməyən həllə uyğun olan inteqal əyrisinin keçdiyi nöqtələrin intervala aid olması və verilmiş qapalı məhdud oblastın sərhəddində yerləşdiyi araşdırılmışdır.

Açar sözlər. Diferensial tənlik, Koşi məsələsi, həllin varlığı və yeganəliyi, həllin davamlılığı, Laqranj teoremi, orta qiymət haqqında teorem, qapalı oblast.

Diferensial tənliklərin və tənliklər sisteminin həllinin davamlılığı zamanla tədqiq olunmş və öyrənilmişdir [1,2], bir çox tədqiqatçıların isə bu problemə maraqları qalmaqdadır. İkinci tərtib diferensial tənliklər üçün həllin davamlılığı, məhdudluğu və qeyri-məhdudluğu üçün kafi şərt isbat olunmuşdur [1]. İkinci tərtib diferensial tənliklərin xüsusi halı üçün analoji tədqiqat aparılmışdır [2]. Burada əsasən göstərilmişdir ki, $a(x,y)=0$ hlında həll davamlıdır və $g(u)$ funksiyası bütün ədəd oxunda müsbətdir.

Sonlu ölçülü həqiqi fəzada yarımxətti diferensial-cəbri tənliklərin qlobal həllinin varlığı və yeganəliyi isbat edilmişdir [3]. Göstərilmişdir ki, tənliyin sağ tərəfinin qeyri-xətti hissəsi qlobal Lipşits şərtini ödəmir. Lyapunov funksiyası, həmçinin, bu məqalədə qeyri-aşkar funksiyalar haqqında teoremin isbatına əsaslanan diferensial bərabərsizliklər vasitəsilə həllin davamlılığı metodundan istifadə edilmişdir.

Sağ tərəfi kəsilməyə malik funksiya olan adi diferensial tənliklərin ümumiləşmiş həlli üçün əsas xassələrdən biri, onun lokal həllinin davamlılıq xassəsinin olmasıdır [4]. Əgər verilmiş diferensial tənliyin sağ tərəfindəki funksiyanın təyin oblastı məhdud $[a,b]\times R^n$ oblastıdırsa, onda həllin maksimal davamlılığı bu təyin oblastının sərhəddinə qədər "çatmalıdır". Əgər tənliyin sağ tərəfinin təyin oblastı bütün $[a,b]\times R^n$ olarsa, onda həllin maksimal davamlılığı $[a,b]$ parçasında təyin olunmuşdur və ya sonsuzluğa yaxınlaşır.

Həllin davamlılığı probleminə yanaşma yuxarıda göstərilən müəlliflərin tədqiqatlarından fərqli olaraq adi diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin həlli zamanı sağ tərəfə davam edilməyən həllin verilmiş intervalda təyin oblastının müəyyən olunması, bu intervalı özündə saxlayan oblastda həllin sonsuzluğa yaxınlaşmasının tədqiq edilməsi çox əhəmiyyətlidir.

Müəyyən edilmişdir ki, qapalı məhdud oblastda davam edilməyən həllə uyğun olan inteqal əyrisinin intervalın uclarından keçdiyi nöqtələr oblastın sərhəddində yerləşir.

Məsələnin qoyuluşu:

$$y' = f(x,y) \qquad (1)$$

diferensial tənliyinin

$$y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

başlanğıc şərtini ödəyən həlli vardır. $f(x,y)$ funksiyası D oblastında təyin olunmuşdur və kəsilməzdir. Onda, bu oblastın hər bir (x_0,y_0) nöqtəsindən (1) tənliyinin heç olmasa bir

davamedilməyən həlli keçir. Əgər (1) tənliyinin $\phi(x)$ həlli sağ tərəfə davamlı deyilsə, onda $\phi(x)$ funksiyasının təyin oblastı $x_0 \le x < \beta$ intervalıdır və bu halda $\beta = +\infty$ və ya $\left|\phi(x)\right| \underset{x\to\beta-0}{\to} +\infty$, yaxud verilmiş oblast $x_0 \le x \le \beta$ parçasını özündə saxlayır və $(\beta,\phi(\beta))$ nöqtəsi D oblastının sərhəddində yerləşir (Analoji olaraq verilmiş şərtlər daxilində həllin sol tərəfə davamlı olmaması isbat olunur).

Məsələnin həlli: Həllin varlığı və yeganəliyi teoreminə əsasən $|x-x_0|\le h$ parçasında (1) tənliyinin $\phi_0(x)$ həlli var və yeganədir [5]. Həllin davamlılığını göstərmək üçün $[x_0-h, x_0+h]$ parçasında $x_1 = x_0 + h$ başlangıc nöqtə olaraq qəbul edilir. Burada $(x_1,y_1)\in R\subset D$, belə ki, $R=\{(x,y): |x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b\}$. Həllin varlığı və yeganəlik problemi (1) tənliyinin $y(x_1)=y_1$ şərtini ödəyən və yeni (x_1,y_1) nöqtəsindən keçən həllinə tətbiq edilir.

Fərz edək ki, bu həl $x_1 \le x \le x_1 + h_1$ intervalında təyin olunan $\phi_1(x)$ funksiyasıdır, yəni

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_0(x), & x_0 - h \le x \le x_0 + h_0 = x_1 \\ \phi_1(x), & x_1 \le x \le x_1 + h_1 = x_2 \end{cases}$$

(1) tənliyinin $[x_0-h, x_1+h_1]$ parçasında həlli $\phi(x)$ funksiyasıdır. Onda uyğun olaraq

$$\phi_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\phi_0(x))\,dx$$

$$\phi_1(x) = y_1 + \int_{x_1}^{x} f(x,\phi_1(x))\,dx$$

yazmaq olar. Beləliklə,

$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\phi(x))\,dx$ həlli $[x_0-h, x_0+h]$ parçasından $[x_0-h, x_1+h_1]$ parçasına davam edilmiş olur. Bu prosesi daha geniş $[x_0-h, x_n+h_n]$ parçasına qədər davam etdirsək, alarıq:

$$[x_0-h, x_0+h] = [\alpha_0,\beta_0] \subset [\alpha_1,\beta_1] \subset [\alpha_2,\beta_2] \subset \cdots \subset [\alpha_n,\beta_n] \subset \cdots$$

Burada $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$ olarsa, onda $\alpha < x < \beta$ intervalında $y' = f(x,y)$ tənliyinin elə $\phi(x)$ həlli var ki, bu həll üçün $\phi(x_0) = y_0$ ödənir. Bu isə o deməkdir ki, əgər (1) tənliyinin sağ tərəfi D oblastında təyin olunub və kəsilməzdirsə, onda qapalı və ya yarımaçıq intervalda bu tənliyin ixtiyari $\phi(x)$ həlli davamlıdır. Əgər $\phi(x)$ həlli $\alpha < x < \beta$ intervalında sağ və ya sol tərəfə davamlı deyilsə, onda məlum teoremə əsasən aşağıdakı üç şərtlərdən birinin ödənilməsi zəruri və kafidir [6]:

1. $\beta = +\infty\ (\alpha = -\infty)$;
2. Əgər $x \to \beta - 0\ (x \to \alpha + 0)$ olarsa,onda $|\phi(x)| \to +\infty$;
3. Əgər $x \to \beta - 0\ (x \to \alpha + 0)$ olarsa, onda $(x,\phi(x))$ nöqtəsi ilə D oblastının sərhəddi arasındakı məsafə sıfra yaxınlaşır.

Qoyulmuş məsələnin şərtində isə (1) tənliyinin $\phi(x)$ həlli sağ tərəfə davamlı olmadığı fərz edildiyi halda $\phi(x)$ funksiyasının təyin oblastının $x_0 \le x < \beta$ olması şərtini isbat etmək üçün əksini fərz edək. Fərz edək ki, $\phi(x)$ həlli sağ tərəfə davamlıdır. Bu halda davamlı olan $\phi(x)$

həlli $\alpha<x<\beta$ intervalında kəsilməzdir və $(\beta,\phi(\beta))$ nöqtəsi D oblastı daxilində yerləşir. Bu isə verilmiş (1-3) şərtlərindən heç olmasa birinin ödənməsi halında mümkün deyildir. Digər tərəfdən $\alpha<x<\beta$ intervalı $x_0\le x<\beta$ intervalını daxilində saxladığından $x=x_0$ nöqtəsi $x=\beta$ nöqtəsindən solda yerləşir. Onda məlum teoremə əsasən oblastın hər bir (x_0,y_0) nöqtəsindən (1) tənliyinin heç olmasa bir davam edilməyən həlli keçir [6]. Bu da o deməkdir ki, $\phi(x)$ funksiyasının təyin oblastı $x_0\le x<\beta$ intervalıdır.

Başda sözlə, problemin qoyuluşu və həlli zamanı $\phi(x)$ həllinin davamlı olmaması haqqında teoremin şərtlərinin ödənilməsi üçün zəruriliyin isbatı da vacibdir. Bunun üçün əksini fərz edək, yəni tutaq ki, verilmiş (1) və (3) şərtlərindən heç biri ödənilmir və $\phi(x)$ həlli davamlıdır. Əgər $\phi(x)$ həlli (1) və (2) Koşi məsələsinin $x_0\le x<\beta$ intervalında həllidirsə və onun qrafiki məhdud $D_0\subset D$ oblastında yerləşirsə, onda bu intervalda $|f(x,y)|\le M$ bərabərsizliyi ödənilir. Bu halda

$$\lim_{x\to x_0+0}\phi(x)=A \quad \text{və} \quad \lim_{x\to\beta-0}\phi(x)=B \qquad (3)$$

sonlu limitləri var. Həqiqətən də $\forall x_1,x_2\in[x_0,\beta)$ üçün Laqranj teoreminə əsasən $\exists\xi\in(x_1,x_2)$ nöqtəsi var ki,
$|\phi(x_2)-\phi(x_1)|=|(x_2-x_1)\cdot\phi'(\xi)|$ bərabərliyi doğrudur. Digər tərəfdən $\phi'(\xi)=f(\xi,\phi(\xi))$ olduğundan

$$|\phi(x_2)-\phi(x_1)|=|(x_2-x_1)\cdot f(\xi,\phi(\xi))|\le M|x_2-x_1| \qquad (4)$$

Burada $|f(\xi,\phi(\xi))|\le M$. (4) bərabərsizliyi və Koşi meyarına əsasən $\lim_{x\to\beta-0}\phi(x)=B$ olduqda $\exists\rho>0$, $\forall x\in(\beta-\rho,\beta)$ üçün $\phi(x)$ funksiyası təyin edilmişdir. Beləki, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ var ki, $\forall x_1,x_2$ üçün $|x_2-x_1|<\delta$ olduqda $|\phi(x_2)-\phi(x_1)|<\varepsilon$ olsun. Buradan $\varepsilon=M\delta\Rightarrow\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ alınır ki, bu da, (3) ifadəsinin doğruluğunu təsdiqləyir. Əgər $\phi(x_0)=A$ və $\phi(\beta)=B$ olarsa, bu $\phi(x)$ funksiyasının $[x_0,\beta]$ parçasında təyin olunması və kəsilməz olması deməkdir. Beləliklə, $[x_0,\beta)$ intervalında verilmiş $\phi(x)$ funksiyası kəsilməz olaraq $[x_0,\beta]$ parçasında davam ediləndir. Bu halda alınır ki, $(x_0,\phi(x_0)),(\beta,\phi(\beta))\in D_0$ və $f(x,\phi(x))$ funksiyası $[x_0,\beta]$ parçasında x dəyişəninin kəsilməz funksiyasıdır. $D_0\subset D$ və $(\beta,\phi(\beta))\in D_0$ olduğundan görünür ki, $\phi(x)$ davam edilməyən həlli məlum teoremin (davamlı olmayan həll haqqında teorem) verilmiş üç şərtindən birinə ziddir, yəni xüsusi halda $(\beta,\phi(\beta))$ nöqtəsi ilə D oblastının sərhəddi arasındakı məsafənin sıfıra yaxınlaşması şərti ödənilmir.

İndi isə nəzərdən keçirək ki, $\phi'(x)$ funksiyası kəsilməzdir, yəni $\phi'(x)\in C_{[x_0,\beta]}$.

Məlumdur ki, həllin $\phi'(x)$ törəməsi də (x_0,β) intervalında kəsilməzdir və $\phi'(x)=f(x,\phi(x))$ Əgər $f(x,\phi(x))$ funksiyası $[x_0,\beta]$ parçasında kəsilməzdirsə, onda

$$\lim_{x\to\beta-0}\phi'(x)=\lim_{x\to\beta-0}f(x,\phi(x))=f(\beta,\phi(\beta)),$$

$$\lim_{x\to x_0+0}\phi'(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x,\phi(x))=f(x_0,\phi(x_0))$$

limitləri vardır. Digər tərəfdən $c\in(x_0,\beta)$ olduğundan $\forall x\in(x_0,\beta)$ üçün

$\phi(x)=\phi(c)+\int_c^x f(x,\phi(x))\,dx$ tənliyi doğrudur. $\phi(x)$ funksiyası $[x_0,\beta]$ parçasında kəsilməz olduğundan alınır ki,

$$\phi(\beta)=\phi(c)+\int_c^{\beta} f(x,\phi(x))\,dx \qquad (5)$$

$$\phi(\beta-h)=\phi(c)+\int_c^{\beta-h} f(x,\phi(x))\,dx \qquad (6)$$

(5) və (6) bərabərliklərini tərəf-tərəfə çıxsaq, orta qiymət haqqındakı teoremə əsasən yaza bilərik:

$$\phi(\beta)-\phi(\beta-h)=\int_{\beta-h}^{\beta} f(x,\phi(x))\,dx=f(\xi,\phi(\xi))\cdot h,\quad \xi\in(\beta-h,\beta)$$

Buradan alınır ki,

$$\phi'(\beta-0)=\lim_{h\to+0}\frac{\phi(\beta)-\phi(\beta-h)}{h}=\lim_{\xi\to\beta-0}f(\xi,\phi(\xi))=f(\beta,\phi(\beta)) \qquad (7)$$

Analoji qayda ilə almaq olar ki,

$$\phi'(x_0+0)=\lim_{h\to+0}\frac{\phi(x_0+h)-\phi(x_0)}{h}=\lim_{\xi\to x_0+0}f(\xi,\phi(\xi))=f(x_0,\phi(x_0))$$

Beləliklə, göstərdik ki, $\phi(x)$ funksiyasının β nöqtəsinin solunda, x_0 nöqtəsinin sağında törəməsi var və β-dən solda və x_0 nöqtəsindən sağda kəsilməzdir, yəni

$$\phi'(\beta-0)=f(\beta,\phi(\beta)),\quad \phi'(x_0+0)=f(x_0,\phi(x_0))$$

Beləliklə, $f(x,y)$ funksiyası kəsilməz funksiyadır və $\phi(x)$ funksiyası $[x_0,\beta]$ parçasında (1) tənliyinin həllidir. Məlum teoremə əsasən əgər $f(x,y)$ funksiyası D oblastında Koşi məsələsinin şərtlərini ödəyirsə, $\phi(x)$ funksiyası isə $[x_0,\beta)$ aralığında təyin olunmuşdursa və $(\beta,B)\in D$ nöqtəsində $\lim_{\xi\to b-0}\phi(x)=B$ limiti varsa, onda $\phi(x)$ həlli sağ tərəfə davam edilən həlldir. $\phi(x)$ həlli D oblastının $[x_0,\beta]$ parçasında təyin olunmuşdursa, onda bu həll sağa və sola davam ediləndir.

Beləliklə, alınır ki, D oblastında davam edilməyən həll yalnız müəyyən (α,β) intervalda təyin oluna bilər ki, bu da həllin varlığının maksimal intervalıdır. Bu halda $\phi(x)$ həlli $x\to\alpha$ və $x\to\beta$ olduqda D oblastının sərhəddinə yaxınlaşır, yəni $(x,\phi(x))$ nöqtəsi D-yə daxil olan ixtiyari D_0 qapalı məhdud oblastını tərk edir. Doğrudan da $x\to\beta$ olduqda $(x,\phi(x))$ nöqtəsi ilə D oblastının ∂D sərhəddi arasındakı məsafə sıfıra yaxınlaşır, yəni $dist((x,\phi(x)),\partial D)=0$. Buradan alınır ki, $(\beta_1,\phi(\beta_1)),(\beta_2,\phi(\beta_2)),\cdots,(\beta_n,\phi(\beta_n))$ nöqtələr ardıcıllığının $\beta_n\to\beta$, $n\to\infty$ olduqda heç bir limit nöqtəsi D oblastının daxili nöqtəsi ola bilməz. Burada aşağıdakı üç hal mümkündür:

1) $\lim_{x\to\beta-0}\phi(x)=\pm\infty$;

2) $\lim\limits_{x \to \beta-0} \phi(x) = B$ bir limit nöqtəsi var;

3) $\lim\limits_{x \to \beta-0} \phi(x)$ -limiti yoxdur, yəni birdən artıq limit nöqtəsi var.

əyrisidirsə, o zaman hər bir $(x_0, y_0) \in D$ nöqtəsindən yalnız bir inteqral əyrisinin keçməsi mümkündür.

3. $f(x,y)$ funksiyası qapalı D oblastında Koşi məsələsinin şərtlərini ödəyirsə, onda ixtiyari $(x_0, y_0) \in D$ nöqtəsi üçün $\phi(x)$ həlli verilmiş $[\alpha, \beta]$ parçasının hər iki tərəfinə davam ediləndir və $(\alpha, \phi(\alpha)), (\beta, \phi(\beta))$ nöqtələri D oblastının sərhəddində yerləşir.

4. (1) tənliyi qapalı D oblastında təyin olunarsa və $f(x,y)$ funksiyası Koşi məsələsinin şərtlərini ödəyirsə, onda bu oblastın hər hansı bir nöqtəsindən çıxan $\phi(x)$ inteqral əyrisi davam edərək oblastın digər nöqtəsinə düşər.

5. Məsələnin şərtinə əsasən $\phi(x)$ həlli davam edilməyəndir isə və uyğun isbat mexanizmi $x \to \beta$ olduqda $(\beta, \phi(\beta))$ nöqtəsinin D oblastının sərhəddində yerləşiyini təsdiq edir.

ƏDƏBİYYAT

1. Мамий, К.С. О некоторых свойствах решений одного нелинейного, дифферен - циального уравнения второго порядка // Вестник Адыгейского Государственного университета. Серия 4. Естественно-математические и технические науки, - 2010. - с. 112-118.
2. Евмухов, В.М. Об условиях колебаемости решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // - Москва: Матем.заметки, - 2000. том 67, вып. 2. - с.150-153.
3. Руткас, А.Г., Филипковская М.С. Продолжение решений одного класса дифференциально-алгебраических уравнений / А.Г.Руткас, М.С.Филипковская // Журнал вычислительный и прикладной математике, - Харков: - 2013. № 1(111), - с. 135-145.
4. Булгаков, А.И. О продолжаемости обобщенных решений функци-онально дифференциальных выключений с Вольтерровым оператором и импульсными воздействами / А.И. Булгаков, О.В. Филиппова // Вестник ТГУ, - 2009. том 14, вып. 4, - с. 676-679.
5. Эльцгольц, Л.Е.. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления / Л.Е. Эльцгольц. - Москва: Наука, - 1991. - 424 с.
6. Петровский, И.Г Лекции по обыкновенных дифференциальный уравнений. 6-ое издания / И.Г.Петровский. – Москва: Наука, - 1994. – 295 с.

SUMMARY

S. Ə. VEYSOVA, candidate of physics and maths sciences; S. T. PASHAYEVA, candidate of physics and maths sciences; M. A. RASULOVA

Azerbaijan Higher Military School named after Heydar Aliyev

E-mail: seltenet.veysova@mail.ru

CONTİNUATİON SOLUTIONS IN THE HALF-INTERVAL OF THE FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

This article examines the non-continuation solution Initial Value Problem (IVP) for ordinary differential equations in a half-open interval and determined that the non-continuation of the solution tends to infinity in the domain containing this interval. Proved that the integral curve of the corresponding non-continuation solution passes through the points of the interval and belongs in the border of bounded domain.

Key words: Differential equation, Initial Value Problem (IVP), the existence and uniqueness of the solution, continuity of the solution, Lagrange's theorem, the theorem on the mean, bounded domain.

РЕЗЮМЕ

ВЕЙСОВА С. А., к. ф. м. н.; ПАШАЕВА С. Т. к. ф. м. н.; РАСУЛОВА М. А.

Азербайджанское высшее военное училище имени Гейдара Алиева

Электронная почта: seltenet.veysova@mail.ru

ПРОДОЛЬЖАЕМОСТЬ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ПОЛУИНТЕРВАЛЕ

В статье исследуется непродолжаемости решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в полуоткрытом интервале и определена, что это решение стремится бесконечность в области содержаций этот полуоткрытый интервал. Доказано, что интегральная кривая соответствующего непродолжаемую решению проходит через точки интервала и принадлежит в границе замкнутой области.

Ключевые слова. Дифференциальное уравнение, задача Коши, существование и единственность решения, продолжаемость решения, теорема Лагранжа, теорема о среднем, замкнутой область.

Məqalə redaksiyaya daxil olmuşdur: 25.02.21