БАЛАКИШИЕВ Б.Б.

БГУ

ЗАМЕЧАНИЕ К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В СПЕЦИАЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ

1. Пусть D односвязная область с кусочно-гладкой границей Г. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа.

$$\Delta u = 0 \qquad в \qquad D \tag{1}$$

$$u = \phi(s) \qquad на \qquad \Gamma \tag{2}$$

Известно, что если функция имеет разрыв второго рода в вершине угла, то в окрестности этой вершины справедлива асимптотическая формула (см. напр.[1]):

$$u^{(n)} \sim r^{-n},$$

где r – расстояние от угловой точки, n – порядок производной. Учитывая эту асимптотику в [2] для погрешности метода сеток в случае пятиточечной разностной схемы получена следующая оценка:

$$\delta_h = \begin{cases} O\left(h^2\right), & при \quad \alpha < 1/2, \\ O\left(h^{1/\alpha-\varepsilon}\right), & при \quad \alpha \ge 1/2, \quad \varepsilon > 0, \end{cases}$$

где $\alpha\pi$ - раствор угла.

В случае, когда непрерывно проходит через вершины углов, для выпуклых ($\alpha<1$) углов учитывая асимптотику

$$u^{(n)} \sim r^{-(n-1)},$$

получена оценка; $\delta_h=O(h^2)$; а для вогнутых ($\alpha>1$) углов пользуясь асимптотикой

$$u^{(n)} \sim r^{1/\alpha-n} \tag{3}$$

в [3] получена следующая оценка:

$$\delta_h = O\left(h^{2/\alpha-2\varepsilon}\ r^{-1/\alpha+\varepsilon}\right). \tag{4}$$

Мы перечисляли случаи, когда граничные условия аппроксимируются таким же порядком, как и уравнение, т.е. порядком $O(h^2)$ в классе гладких решений.

В настоящей заметке рассматривается задача Дирихле в области D, граница Γ которой состоит из отрезков параллельных координатным осям, причем эти отрезки соизмеримы; $\varphi(s)$- непрерывная функция длины дуги Г, т.е. для точного решения верна оценка (3).

2. Выберем $h_0>0$ такое, что квадратная сетка для области $\bar{D} = D \cup \Gamma$ с шагом $h, 0<h\le h_0$ была согласованная. Множества узлов лежащих в D и на Γ, обозначим через D_h и Γ_h, соответственно.

Рассмотрим девяти точечную разностную схему (см. [4], [5]):

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_h U_h \equiv \frac{1}{6h^2}\Big[U_{i+1,j+1} + U_{i+1,j-1} + \\ &U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1} + 4\big(U_{i+1,j} + U_{i-1j} + \\ &+U_{ij+1} + U_{ij-1}\big) - 20U_{ij}\Big] = 0 \quad в \quad D_h \\ &U_h = \phi_h \qquad\qquad на\ \Gamma_h. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Погрешность $\delta_h = u - U_h$ приближенного решения является решением задачи:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_h\delta_h = h^4 M_6 \quad в \quad D_h, \\ \delta_h = 0 \qquad на \quad \Gamma_h, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Где M_6 - линейная комбинация шестых производных от u.

3. Пусть z_0- произвольная угловая точка, где раствор угла равен $\alpha\pi$, границы Γ и значение функции φ в точке z_0 обозначим через φ_0.

Следуя технике работы [3] исследованной для пятиточечной схемы доказывается.

Лемма. В окрестности z_0, где выполняется оценка (3) для решения разностной задачи (5) справедлива оценка.

$$U_h - \varphi_0 = O\left(r^\gamma\right), \quad (7)$$

где $0 < \gamma \le 1/\alpha$.

На основании Леммы и соотношений (6) учитывая оценку (3) доказывается.

Теорема. Для погрешности приближенного решения задачи (6) верны оценки:

$$\delta_h = \begin{cases} O\left(h^{4-2\varepsilon} r^{-2+\varepsilon}\right) & при \quad \alpha = 1/2, \\ O\left(h^{2/\alpha-2\varepsilon} r^{-1/\alpha+\varepsilon}\right) & при \quad \alpha > 1. \end{cases} \quad (8)$$

4. **Замечание**. Полученный результат показывает, что применяя девяти точечную схему результаты Лаасонена для рассматриваемых нами областей, можно улучшить только для α=1/2, т.е. практических расчетах для областей с углами α>1/2, $\alpha\neq$1, не следует усложнять схему. Оценки (8) также подтверждают следующий пример, аналогичный примеру Е.А. Волкова [6]. При решении с помощью девятиточечной схемы задачи Дирихле для уравнения Лапласа в секторе девятиточечной схемы задачи Дирихле для уравнения Лапласа в секторе $T_\alpha = \left\{0 < r < 1, |\theta| < \frac{\alpha\pi}{2}\right\}$, точным решением которой является функция $\upsilon(x,y) = r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\theta}{\alpha}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = arg(x+iy)$, погрешность приближенного решения, при $1/2 < \alpha \le 2$, $\alpha \ne 1$, $0<h\le h_\alpha$, удовлетворяет неравенству:

$$\max_{(kh,mh)\in T_\alpha} \left|\delta_h(kh,mh)\right| > \frac{h^{1/\alpha}}{\alpha} c_0 \left|\frac{1}{\alpha} - 1\right| c_\alpha^{1/\alpha-8}$$

Где k, m целые, c_0, c_α положительные постоянные, не зависящие от h.

5. Численные расчеты подтверждающие справедливость оценки (7).

Таблица

α	n	γ_4	γ_2	γ_1	$\bar{\gamma}$
$\frac{1}{2}$	4	2.022750	2.026772	2.007098	2
$\frac{1}{3}$	5	0.689891	0.671809	0.670012	0.666……
2	7	0.556704	0.523203	0.509801	0.5

Рассматривается задача (1) и (2) в областях с наибольшими углами $\pi/2$, $3\pi/2$ и 2π, точным решением которой является $u(x,y) = r^{1/\alpha} sin\theta in$.

В таблице $\bar{\gamma}$ ожидаемый результат, γ_4, γ_2, γ_1 - вычислительные значения γ при шагах, изменяющихся в соотношении 4:2:1, а именно 1/8, 1/16 и 1/32; n – количество направлений в которых зачислены γ_j, $j=1,2,3,4$. Относительно заполнения таблицы см.[7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Laasonen P. Ann. Acad. Sci. Fenn AI 241, 1-13 (1957)
2. Laasonen P. Ann. Acad. Sci. Fenn AI 246, 1 – 19 (1957)
3. Laasonen P. Ann. Acad. Sci. Fenn AI 408, 3- 16 (1967)
4. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Ил., 1963.
5. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М., Наука, 1976.
6. Волков Е.А. Труды МИАН СССР, 140 (1976) 68-102.
7. Балакишиев Б.Б. В сб. «Приближенные методы решения операторных уравнений». Баку, Изд.АГУ, 1985, с.17-24.

Balakishiyev B.B.

For the Laplace equation on a special polygon on the numerical solution of the Drixle problem

SUMMARY

The Drixle problem is considered in the region with the boundary parallel to the coordinate axes. Given the property of the solution at the corner points, the error of the grid method is estimated. It is shown that the results of the Finnish mathematician P. Laason can be improved only and only in rectangular regions by means of the eight-point scheme.

Balakişiyev B.B.

BDU

Xüsusi çoxbucaqlıda Laplas tənliyin üçün Drixle məsələsinin ədədi həllinə dair

XÜLASƏ

Koordinat oxlarına paralel sərhədə malik oblastda Drixle məsələsinə baxılır. Künc nöqtələrində həllin məxsusiyyəti nəzərə alınaraq, şəbəkə üsulunun xətası qiymətləndirilir. Göstərilir ki, fin riyaziyyatçısı P.Laasonenin nəticələrinin yalnız və yalnız düzbucaqlı oblastlarda qoqquznöqtəli sxemin vasitəsilə yaxşılaşdırmaq olar.

Отзыв дал на статью заведующий кафедры «Математические методы прикладного анализа» БГУ, академик М.Ф. Мехтиев