

Günay Musa qızı Quluzadə
Bakı Slavyan Universiteti
gunay_quluzade00@mail.ru

FERMA ƏDƏDLƏRİ, FERMA NÖQTƏSİ VƏ FERMA TEOREMLƏRİ

Açar sözlər: Pyer Ferma, teorem, mahiyyət, isbat, nəticə, düstur, nöqtə, üçbucaq

Key words: Pierre Ferma, theorem, essence, proof, result, formula, point, triangle

Ключевые слова: Пьера Ферма, теорема, суть, доказательства, результат, формула, точка, треугольники

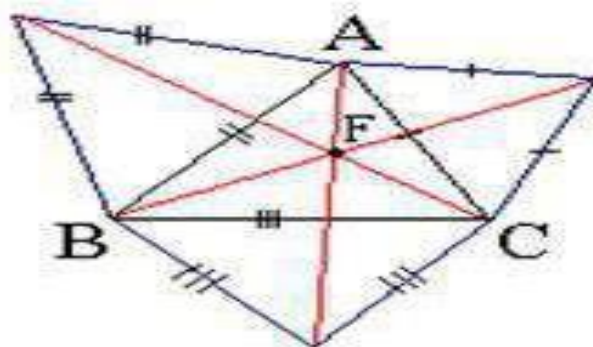
Pyer Ferma 17 avqust 1601-ci ildə Fransada dünyaya gəlmişdir. O, XVII əsrin ən nəhəng riyaziyyatçılarından biridir. Ədədlər nəzəriyyəsi, həndəsə, cəbr, riyazi analiz (maksimum və minimumların tapılma üsulları), ehtimal nəzəriyyəsilə məşğul olmuşdur. Rene Dekartla birlikdə analitik həndəsənin yaradıcılarından biridir. Ədədlər nəzəriyyəsində onun iki teoremi – Fermanın böyük və kiçik teoremləri xüsusilə məşhurdur. O, heç bir kitab yazmamışdır (o vaxtlar elmi jurnallar da yox idi). Ondan yalnız dostlarına yazdığı məktublar qalmışdır. Lakin bu məktublarda riyaziyyata aid faktlar Fermanı Fransanın ən böyük riyaziyyatçılarından birinə çevirir. P.Ferma və B.Paskalın bir-birinə, yazdıqları məktublardakı faktlar Ehtimal nəzəriyyəsinin inkişaf tarixinin başlanğıcıdır. Fermanın əyriyə toxunan düz xəttin qurulmasına, əyrixətli trapesiyanın sahəsinin tapılmasına, əyrinin uzunluğunun hesablanmasına tətbiq etdiyi, üsullar diferensial və integral hesabının yaradılmasına yol açdı. Bunlara baxmayaraq, Fermanı məşhurlaşdıran onun ədədlər nəzəriyyəsinə aid işləri olmuşdur. Fermanı həlli olmayan məsələlər daha çox maraqlandırır. Onun ən məşhur “mümkünsüzlük” haqqında təklifi Fermanın böyük teoremidir.

Ferma ədədləri haqqında. XVII əsrin məşhur riyaziyyatçısı Pyer Ferma $2^{2^n} + 1$ şəklində olan ədədləri öyrənmişdir. Bu ədədləri Ferma ədədləri adlandırırlar. Alim qəbul etmişdi ki bu ədədlərin hamısı sadə ədədlərdir. Onun buna əsası da vardır. Ona görə ki, $n=0; 1; 2; 3; 4$ qiymətləri üçün, həqiqətən Ferma ədədləri sadə ədədlərdir. Ancaq XVIII əsrdə Leonard Eyler göstərdi ki, $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ ədədini 641 və 6700417 sadə ədədlərinin hasili şəklində göstərmək olar. Digər tərəfdən yuxarıda göstərilən beş ədəddən başqa sadə Ferma ədədlərinin olması məlum deyil. Maren Mersenə (1588-1648-ci illərdə yaşamış Fransız rəhibi, həmçinin riyaziyyatçısı, əgər $2^n - 1$ sadə ədəddirsə onu Mersen ədədi adlandırırlar) ünvanladığı məktublarının birində Pyer Ferma belə bir təklif irəli sürür ki, n ikinin qüvvətidirsə $2^n + 1$ şəklində olan ədədlər mütləq sadədir. Ferma həmçinin bilirdi ki, n ikinin qüvvəti deyilsə, onda $2^n + 1$ ədədi sadə deyil. Bu vaxta kimi isə yüz ildən də çox Fermanın hipotezi yaşadı. Sonra yoxlanılan bütün Ferma ədədləri mürəkkəb oldular və ilkin fərziyyəyə tam zidd olan bir təbii fərziyyə meydana gəldi: bəlkə Ferma ədədlərinin arasında sadə ədəd olanlarının sayı sonludur? Ferma ədədlərinin kifayət qədər ümumi xassələri bəllidir. Məsələn, istənilən iki Ferma ədədi qarşılıqlı sadə ədədlərdir. Karl Qauss hələ 19 yaşının tamam olmasına 1 gün qalmış isbat etmişdir ki, düzgün n -bucaqlı, pərgar və xətkəşin köməyiylə yalnız və yalnız onda qurula bilər ki (hələ lap qədimlərdən yunan və bir sıra digər yerlərdəki məşhur alimlərə məlum olan düzgün 3, 4, 5, 6, 15 bucaqlıların qurulmasından başqa), onun tərəflərinin sayı $n=2^{2^n} + 1$ şəklində göstərilə bilsin və bu da ki, Ferma ədədinin ümumi halıdır. Qeyd edək ki, Qauss bu kəşfilə neçə minillərdir ki alimləri narahat edən hansı düzgün bucaqlıları xətkəş və pərgarın köməyiylə qurmaq olar sualına cavab tapmış oldu, həmçinin $n=2$ olduqda çevrəni düzgün 17 bərabər hissəyə bölməyin mümkünlüyünü isbat etmiş oldu ($n=3$ olduqda 257 olar). Ferma ədədlərinin sadə ədədlərin öyrənilməsində ümumənəzəri əhəmiyyəti aşağıdakı teoremlə ifadə olunur: Əgər $a \geq 2$ və $a^n + 1$ sadədirsə, onda " a " cütüdür.

Ferma nöqtəsi. Həndəsədə çox gözəl bir teoremin adı Fermanın adı ilə bağlıdır. Bu üçbucaqda Ferma-Toriçelli nöqtəsinin tapılmasıdır. Bu nöqtə keçmişin ən böyük 3 riyaziyyatçısının adı ilə bağlıdır. İlk dəfə onun haqqında Pyer Fermanın işlərində danışılır. O, ABC üçbucağının daxilində elə F nöqtəsinin yerləşməsi haqqında məsələni tələb edirdi ki, $FA+FB+FC$ cəmi minimal olsun. İsveçrə alimi Yakob Şteyner bu məsələyə daha ümumi halda baxmışdır: o, 3 məntəqəni birləşdirən ən qısa yol şəbəkəsinin tapmağa çalışırdı. Məlum olur ki, şəbəkə mütləq bir nöqtədə birləşən düzxətli yollardan ibarət olmalıdır, belə ki, yollardan biri nöqtəyə çevrilə bilər. Belə qoyuluşda məsələ sırf praktiki əhəmiyyət daşıyır, məsələn, naqıl şəbəkələrinin çəkilişində belə bir məsələni həll etmək lazım gəlir.

Nöqtənin qurulması. Fermanın klssik məsələsinin həlli üçün belə bir fiziki modeli bu formada qurmaq olar: Hər hansı lövhə üzərində bir üçbucaq çəkək. Onun təpələrinə mismar vuraq, bütün mismarlardan ucunda eyni ağırlıqda yük olan sap keçirək və nəhayət, sapların digər boş qalmış uclarını bir nöqtədə düyünləyək.

Yüklər buraxıldıqda sapı dartacaqlar. Bu halda sapların sallanmış hissələrinin uzunluqları cəmi ən böyük, düyündən mismarlara qədər olan məsafələrin cəmi isə ən kiçik olacaq. Beləliklə, yüklərin buraxıldığı andan etibarən, düyün bizim axtardığımız nöqtə olacaq. Üçbucağın verilən şərtləri ödəyən bu nöqtəsinə cəvə barometrinin ixtiraçısı kimi tanınan Evangelista Toriçelli qurmuşdur. Belə nöqtə yalnız bucaqları 120-dən böyük olmayan üçbucaqlarda mövcuddur və bu nöqtə Ferma nöqtəsilə üst-üstə düşür, yəni söhbət eyni bir minimal cəm nöqtəsinin qurulmasından gedir. Toriçelli qurmasından fərqli olaraq bu nöqtə üçbucağın bucaqlarından biri 120-dən böyük olduqda belə həll olunur, və bu halda F nöqtəsi kor bucaq təpəsilə üst-üstə düşür. Bu nöqtəni belə də almaq olar: üçbucağın tərəfləri üzərində onun xaricində hər tərəfin ölçüsünə uyğun olaraq müvafiq düzgün üçbucaqlar quraq. Sonra isə əvvəlcədən verilmiş üçbucağın təpəsini onun qarşısındakı tərəf üzərində qurulmuş düzgün üçbucağın təpəsilə birləşdirək. Hər üç parça bir-birlərilə 60 bucaq əmələ gətirirlər və yalnız bir nöqtədə Toriçelli yaxud da Ferma nöqtəsində kəsişirlər.



Fermanın kiçik teoremi – natural ədədlərin bölünməsi nəzəriyyəsində ən fundamental faktlardan biridir. Teoremin ifadəsi belədir: Əgər p sadə ədəddirsə, a ədədi p -yə bölünməyən natural ədəd olarsa, onda a^{p-1} ədədi p -yə bölünəndə qalıqda 1 qalır. Teoremi başqa cür belə ifadə etmək olar: “Əgər p sadə ədəd, a ixtiyari natural ədəddirsə, $(a^p - a)$ ədədi p -yə bölünür.” Ferma bu teoremin isbatını saxlamamışdır. Teoremi ilk dəfə L. Eyler isbat etmişdir.

Fermanın böyük teoremi Bu teorem Diofantın “Hesab” kitabının ikinci hissəsində, 8-ci məsələnin qarşısında yazılmışdır: “Verilən kvadratı iki kvadrata ayırın”. Başqa sözlə desək, verilmiş a ədədi üçün $x^2 + y^2 = a^2$ tənliyini rəşional həllərini tapmaq tələb olunur. Bu da ki bizlərə çox yaxşı tanış olan Pifaqor teoremidir və onun sonsuz sayda həlli var. Ferma qeyd etmişdir: “Kubu iki kuba, kvadratın kvadratını iki kvadratın kvadratına, ümumiyyətlə dərəcəsi ikidən böyük sonsuzluğa qədər heç bir qüvvəti bütün həmin dərəcəli iki qüvvətə ayırmaq olmaz. Mən bunun həqiqətən çox gözəl isbatını tapmışam, amma onun üçün yer olduqca azdır”. Başqa sözlə $x^n + y^n = z^n$ qeyri-müəyyən tənliyinin $n \geq 3$ olduqda, heç bir rəşional həlli yoxdur. Bu təklif Fermanın böyük və ya sonuncu teoremi adlanır. Onun isbatını riyaziyyatçılar 356 ildən çox axtarmalı olmuşlar.

Teoremin isbatı. Fermanın özü yalnız $n=4$ halında teoremin isbatını saxlamışdır. Leonard Eyler bu teoremi n -in 3 və 4, Lejandr n -in 5, Dirixle isə 7 qiymətləri üçün isbat etdi. Leonard Eyler teoremin $n=3$ halını isbat etməsindən 30 il keçdikdən sonra bu halı 1768-ci ildə yenidən isbat etdi. Bu teoremlərin hər birinin isbatının hər iki hal üçün olduqca mürəkkəb və uzun olduğunu nəzərə alaraq burada onun isbatlarını vermirik. Bunun üçün tamamilə yeni bir ideya tələb olmurdu. O, burda çox cəsarətli bir addım atmışdır. Bu ideyanın mahiyyəti adi tam ədədlərə aid məsələlərin tədqiqində $a+b\sqrt{-n}$, şəklində olan xəyali ifadələrin tətbiqindən ibarətdir. Eyler öz isbatında $\alpha = a+b\sqrt{-3}$ şəklində ifadəyə baxmışdır. Lakin bütün bunlarla və adları sadalanayan məsələlərlə əlaqədar olaraq Eyler öz mülahizəsini əsaslandırmaı və bu məsələlə yenə də Ferma teoreminin isbatı ilə bağlı yenidən XIX əsr riyaziyyatçıları qarşısında dayandı. Ümumiyyətlə, bu halların isbatı üçün tamamilə yeni bir ideya lazım idi ki, bunu da Ferma tapmışdır: bu sonsuz enmə metodudur. Ferma təsdiq etmişdir ki, özünün ədədlərə aid ən məşhur teoremlərini o məhz bu üsulla isbat etmişdir. Enmə üsulu bu gün də ədədlər nəzəriyyəsinə mühüm rol oynayır Teoremin isbatına müxtəlif mükafatlar vəd olundu və bu teoremi isbat etməyə cəhd göstərən və ya teoremi isbat etdiyini düşünən böyük bir fermatistlər ordusu əmələ gəldi. Riyaziyyat kafedralarına hər il teoremin minlərlə isbatı təqdim olunurdu. Bu-

nunla belə, bu isbatların hamısında səhvlər var idi. n -in 100-dən kiçik, hətta 619-dan kiçik qiymətləri üçün də teorem isbat olundu, amma bunlar hələ də Böyük Ferma teoreminin isbatı demək deyildi. Ömrünü-gününi tənliyi doğru bərabərliyə çevirən n -i tapmağa həsr edənlər də, yəni teoremi inkar etməyə çalışanlar da oldu... 1 mart 1847-ci ildə fransız riyaziyyatçısı və fiziki Qabriel Lame Paris Elmlər Akademiyasının iclasında böyük teoremin yeni isbatını məruzə etmişdir. Digər məşhur fərsiz riyaziyyatçısı Liuvill bu barədə yazırdı: “edilən cəhdlər mənə göstərdi ki, əvvəlcə kompleks ədədlər üçün “hasil yalnız bir üsulla sadə vuruqlarına ayrıla bilər” elementar fərziyyəsinə analoji teoremi müəyyən etmək lazımdır. Lamenin fikri məndə yalnız bu fikri təsdiqlədi, burda doldurulması boşluq yoxdur ki?” Bu qeydlər sayəsində riyaziyyatın bu bölməsi bir ilə yaxın müddətdə fransız riyaziyyatçıların diqqət mərkəzində oldu. Bu sahə ilə Lamenin özü və digər alimlər intensiv şəkildə məşğul oldular. Onların tədqiqatları nəticəsində tam ədədlərin toplama, vurma və bölməyə nəzərən xassələrini ən ümumi şəkildə ifadə edən yeni bir riyazi obyekt – halqa anlayışı formalaşdı. Həmçinin sonralar alman riyaziyyatçısı Böyük teoremlə məşğul olarkən cəbrə yeni mühüm obyektlər – ideallar daxil etmişdir.

1955-ci ildə 28 yaşlı yapon riyaziyyatçısı Yutaka Taniyama riyaziyyatın tamamilə başqa bir sahəsinə aid hipotez irəli sürür. “Taniyama hipotezi” adlanan bu hipotezə görə hər bir elliptik əyriyə bir modulyar forma uyğun gəlir. İkiölçülü əyrilərlə 19-cu əsrdə kəşf olunmuş dördölçülü funksiyalar arasındakı bu uyğunluq bir çox riyaziyyatçılara absurd və paradoksal görünürdü. 1958-ci ildə Taniyama intihar edir... 70-ci illərdə bu hipotezlə maraqlananların sayı artır. Amma bu hipotezi də isbat etmək heç kəsə nəsisb olmur. 1985-ci ildə riyaziyyat tarixində ekstravaqant yapon hipotezi ilə böyük Ferma teoremini birləşdirən bir hadisə baş verir. Alman riyaziyyatçısı Gerxard Frey maraqlı bir fikir irəli sürür: “Taniyama hipotezi isbat olunarsa Böyük Ferma teoremi də isbat olunacaq”. Frey müəyyən çevirmələrlə Ferma tənliyini Taniyama hipotezindəki elliptik əyri tənliyinə gətirməyə nail olmuşdu. Freyin tam əsaslandırma bilmədiyi bu hökmünün dəqiq isbatını 1986-cı ildə Kaliforniya Universitetinin professoru Kennet Ribet verir. Beləliklə, isbat olunur ki, Ferma teoremi Taniyama hipotezinin bir nəticəsidir. Deməli, Taniyama hipotezini isbat etmək, həm də Ferma teoremini isbat etmək demək idi! Məhz bu Uayls tərəfindən şərh edilmişdir. Belə hünəri heç kim kifayət qədər az tanınan riyaziyyatçıdan gözləməirdi.

1993-cü ildə Kembridcdə ədədlər nəzəriyyəsinə həsr olunmuş konfransda ABŞ-dan olan ingilis alimi Endryu Uayls Taniyama hipotezini isbat etdiyini deyir və bu isbatı təqdim edir. Uaylsın ideyası $x^n + y^n = z^n$ tənliyi və $y^2 = x(x-a_n)(x-c_n)$ tənliyi ilə verilən elliptik əyrilər arasındakı çox yaxşı əlaqəyə əsaslanıb. İlk dəfə ona fransız riyaziyyatçısı İv Elleqarş diqqət yetirmişdir. Bu, əlbəttə, əsl sensasiya idi və böyük cəsarət tələb edirdi. Təqdimat uğurla keçir və isbatda səhv tapan olmur, amma bununla bərabər, isbat 6 hissəyə bölünərək, yoxlanılmaq üçün aparıcı mütəxəssislərə təqdim olunur. 2 aydan sonra resenzentlərdən biri olan Nik Kats teoremin isbatının müəyyən yerində bir boşluq olduğunu, əsaslandırmanın zəif olduğunu üzə çıxarır. Ümumilikdə isə onun ideyalarının müasirliyi, dərinliyi və gözəlliyi təsdiq olundu. Ömrünün 20 ildən artığını bu teorem üzərində gizli çalışan Uayls bu xəbərdən sarsılır. Uayls bu ilkin isbatı 1993-cü il 23 iyulda Kembridcdə İsaak Nyuton adına Riyaziyyat institutunda oxuduğu mühazirələrində şərh etmişdir. Bu iş gərgin yaradıcı əməyin məhsulu idi. Uaylsın etirafına görə arvadından başqa heç kəs onun bu sahədə işlədiyini bilmirdi. Amma özündə güc tapıb keçmiş aspirantı və dostu Riçard Teylorla bərabər yaranmış vəziyyətdən çıxış yolu axtarır. Bir ildən də az müddətdə onlar isbatdakı probeli bağlamağa nail olurlar və 1994-cü ilin oktyabrında Uayls isbatın düzəldilmiş-korrekt variantını Sürixdə keçirilən riyaziyyat üzrə növbəti Beynəlxalq Konqresə təqdim edir. Bütün riyaziyyat aləmi onun məruzəsini, əlbəttə ki, səbirsizliklə gözləyirdilər. Təbii ki, Uayls isbatı çıxış növbəsinə kimi tamamalamaq istəyirdi, amma o, buna müvəffəq olmadı. Həmkarları onu məruzədən əvvəl auditoriyanın yanındakı pilləkənlərdə oturub necə işlədiyinin şahidi oldular. Uayls kafedraya qalxarkən onu donmuş vəziyyətdə gözləyən zala isbatı tam yerinə yetirmədiyi xəbərini verdi. Zal onu dostcasına alqışladı. Artıq konqresdən bir ay sonra Uaylsın özünün sözlərinə görə əsas ideyası işıqlandı və yaranmış boşluğu nəhayət ki doldura bildi. Bu dəfə isbat son dərəcə dəqiq yoxlanmalara davam gətirdi və çap olundu. Bax beləcə 350 il tarixi olan böyük teoremin isbatı sona çatdı. 1995-ci ilin yayında Priston Universitetində dərc olunan “Annals of Mathematics” yəni, “Riyaziyyat salnaməsi” jurnalı bütünlükdə bu teoremin isbatına həsr olunmuşdur. 100 səhifədən çox həcmə malik olan isbat iki məqaləyə bölünərək bütün məqaləni tam tuturdu. İsbatın əsas hissəsi təxminən 10 il bu məşhur problem üzərində çalışan Priston universitetinin professoru 42 yaşlı Endri Wilesə məxsus idi. Son mərhələdə isə Oksford universitetinin professoru Riçard Teylor qoşulmuşdur. O, Uaylsın ilkin isbatında olan boşluğu aradan qaldırmağa kömək etmişdir. Təbii olaraq belə bir sual meydana çıxır: Ola bilməzi ki, bizə gəlib çatmayan Fermanın isbatı (əgər bu olsaydı) Uaylsın variantına analoji olsun? Bu sualla bağlı Uaylsın fikri belə idi: “Ferma belə isbatı verə bilməzdi. Bu iyirminci əsrin isbatıdır”. Fermanın böyük teoremi, elə bil ki, xüsusi xarakter daşıyır. Onu isbat etmək cəhdləri riyaziyyatı yeni ideyalar, nəzəriyyələr, üsullar ilə zənginləşdirdi. Bu teoremin danılmaz əhə-

miyyəti məhz bundadır. XX əsrdə böyük teoremlə sürətlə inkişaf edən riyazi nəzəriyyəylə cəbri həndəsənin əlaqəsi üzə çıxdı. Məhz bu nəzəriyyə çərçivəsində müvəffəqiyyət əldə olundu. Ferma teoreminin isbatında çoxlu riyaziyyatçıların əməyi olmuşdur.

Ədəbiyyat

1. "Uşaqlar üçün ensiklopediya. Riyaziyyat.", Bakı, "Şərq-Qərb", 2008. səh.606
2. Fermat, Pierre de // 1911 Encyclopædia Britannica - 11 - New York City: 1911. - Vol. 10. - P. 275.
3. Ферма Пьер // Большая советская энциклопедия: [в 30 т.] / под ред. А. М. Прохорова - 3-е изд. - М.: Советская энциклопедия, 1969.
4. <http://www.nytimes.com/1983/07/19/science/german-is-hailed-in-math-advance.html>
5. https://az.wikipedia.org/wiki/Pyer_Ferma
6. <http://www.imm.az/exp/2017/04/27/fermanin-kicik-teoremi/>

Ferman's numbers, Ferman's point and Ferman's theorems

Summary

Pierre Farm lived in the 17th century. He has not written any books. He has only letters to his friends. His work has made him famous for his theory of numbers. The famous 17th century mathematician Pierre Ferma studied the numbers in the form of $2^{2n} + 1$. His theorems have become more popular. It took 360 years to prove these theorems. Famous mathematicians have tried to prove the theorem. The English scientist Andrew Wiles proved the theorem. The proof of the theorem was published in 1995 in the journal "Annals of Mathematics".

Числа Фермы, точка Фермы и теоремы Фермы

Резюме

Ферма Пьера жил в 17 веке. Он не написал ни одной книги. У него есть только письма своим друзьям. Его работа сделала его известным своей теорией чисел. Знаменитый математик 17-го века Пьер Ферма изучил числа в виде $2^{2n} + 1$. Его теоремы стали более популярными. Потребовалось 360 лет, чтобы доказать теоремы. Известные математики пытались доказать теорему. Английский ученый Эндрю Уайлс доказал теорему. Доказательство теоремы было опубликовано в 1995 году в журнале "Анналы математики".

Rəyçi: dos. X.Novruzova

Göndərilib: 19.03.2020

Qəbul edilib: 21.03.2020