

CİSMİN TAM ENERJİSİ ƏSASINDA FUNKSIONALIN QURULMASI

Vəliyeva H.H.

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

hemide15@mail.ru

Xülasə: *Təqdim olunan işdə funksionalın ekstremallarının tapılmasının bəzi klassik məsələlərinə baxılmış, deformasiyaya məruz qalan cismin və ona təsir edən yükün tam potensial enerjisini ifadə edən funksional qurulmuşdur. Bu funksional deformasiya olunan bərk cisim mexanikasında mühüm rol oynayır [1].*

Açar sözlər: *tam enerji, potensial enerji, funksional, yerdəyişmə, deformasiya, xarici qüvvələr.*

Tam enerji - E cismin deformasiyasının potensial enerjisindən - U (daxili qüvvələrin potensialı) və xarici qüvvələrin enerjisindən - Π (xarici qüvvələrin potensialı) ibarətdir:

$$E = U + \Pi . \quad (1)$$

Şerti olaraq qəbul edəcəyik ki, başlanğıc, yəni deformasiya olunmamış halda $E_0 = 0$. Deməli, E - tam enerjisi cismin başlanğıc haldan deformasiya

olunmuş vəziyyətə keçidi zamanı daxili və xarici qüvvələrin enerjisinin dəyişməsinə göstərir.

Qüvvələrin ixtiyari sisteminin enerjisi işlə ölçülür, bu işi cismi baxılan vəziyyətdən başlanğıc hala ($E_0 = 0$) gətirən qüvvələr görür. Buna görə də cisim deformasiya vəziyyətindən başlanğıc hala gələn zaman (1) ifadəsi vasitəsilə enerjini elastikliyin daxili qüvvələrinin (U üçün) və xarici qüvvələrin (Π üçün) işi kimi hesablayacağıq.

Əvvəlcə daxili qüvvələrin U potensialı üçün ifadəni quraq. Cismin həcmi üzrə deformasiyalar qeyri-müntəzəm paylandığından deformasiya enerjisi də cismin həcmində qeyri-müntəzəm paylanır. Deformasiya enerjisinin sıxlığı və ya deformasiyanın ayrıca potensial enerjisi (U_0) anlayışını daxil edək. Bu enerji aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$U_0 = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V}. \quad (2)$$

(2) düsturu onu göstərir ki, ΔV sıfıra yaxınlaşdıqda ΔV həcmində toplanmış ΔU enerjisinin bu həcmə nisbətinin limiti U_0 - enerji sıxlığını verir. Bircins deformasiya vəziyyəti üçün U_0 elə enerjidir ki, o, materialın vahid həcmində toplanır.

Xətti gərginlik vəziyyəti üçün deformasiya enerjisinin sıxlığı materialın deformasiya diaqramının sahəsi vasitəsilə ifadə olunur. Bu halda $U_0 = 0,5\sigma\varepsilon$, burada σ – gərginlik, ε – deformasiya vektorlarıdır. Bu düsturu həcmi-gərginlik vəziyyəti halı üçün ümumiləşdirsək, alırıq:

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}). \quad (3)$$

Əgər $\vec{\sigma}$ və $\vec{\varepsilon}$ vektorlarının işarə olunmalarından istifadə etsək, (3) düsturunu qısa formada yazmaq olar:

$$U_0 = \frac{1}{2}\vec{\sigma}^T \vec{\varepsilon}. \quad (4)$$

Bütün V həcmində deformasiyanın U enerjisini həcm üzrə aşağıdakı inteqralı hesablamaqla tapmaq olar:

$$U = \iiint_V U_0 dV. \quad (5)$$

Qeyd etmək lazımdır ki, U_0 -ı iş kimi hesabladıqda, həmin iş σ gərginliyindən fərqli olaraq daxili σ' gərginliyinin işi kimi hesablamaq lazımdır. σ - material üçün xarici gərginlik olub, onun sərhədlərinə təsir edir. Deformasiya ε qiymətindən 0-a kimi azaldıqda σ' gərginliyi U_0 -a bərabər olan müsbət istiqamətli iş görür. Ümumiyyətlə, elastiki qüvvələr deformasiya olunan cismi əvvəlki formaya bərpa etməyə çalışdıqda, (5) deformasiya enerjisinə

müsbət enerji verəcəklər və E enerjisinin ümumi balansına müsbət şəkildə əlavə olunacaqlar.

İndi isə Π - xarici qüvvələrin potensialı üçün ifadə quraq. Hesab edəcəyik ki, bu qüvvələrin qiyməti qüvvənin (çəki ağırlığı, maye və ya qazın təzyiqi və s.) təsir etdiyi nöqtənin yerdəyişməsindən asılı deyildir.

Cismin deformasiya olunmayan vəziyyətə gəlməsi zamanı təsir edən qüvvələr yerdəyişmələrdə mənfi istiqamətli iş görürlər. u, v və w ilə uyğun olaraq OX, OY və OZ koordinat oxları üzrə yerdəyişmələri işarə etsək, Π -nin diferensialı üçün aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$d\Pi = -(p_x u + p_y v + p_z w) dS.$$

Analoji olaraq həcmi yükləmənin ifadəsini yazmaq olar:

$$d\Pi = -(Xu + Yv + Zw) dV.$$

Yuxarıdakı ifadələri cismin S səthi və V həcmi üzrə integrallasaq, xarici qüvvələrin potensialının düsturunu almış olarıq:

$$\Pi = -\iint_S (p_x u + p_y v + p_z w) dS - \iiint_V (Xu + Yv + Zw) dV, \quad (6)$$

(6) ifadəsi qısa formada isə

$$\Pi = -\iint_S \vec{p}^T \vec{u} ds - \iiint_V \vec{g}^T \vec{u} dV \quad (7)$$

şəklində olur.

Asanlıqla görmək olar ki, Π - xarici qüvvəsində olduğu kimi U enerjisinin qiyməti də tamamilə u, v və w yerdəyişmə funksiyalarının verilməsilə təyin olunur. Doğrudan da, Huk qanunundan və Koşi tənliyindən istifadə etsək, (4) ifadəsi U_0 üçün aşağıdakı şəkllə düşər:

$$U_0 = \frac{1}{2} (D\vec{\varepsilon})^T \vec{\varepsilon} = \frac{1}{2} \vec{\varepsilon}^T D\vec{\varepsilon} = \frac{1}{2} (A^T u^T D(A^T \vec{u})). \quad (8)$$

Beləliklə, cismin (1) tam enerjisi üç - $\vec{u} = [u, v, w]^T$ funksiya-arqumentinin seçilməsindən asılı olan funksionaldır [2], yəni

$$E = E(u, v, w). \quad (9)$$

(9) ifadəsini açıq şəkildə yazsaq, funksional üçün aşağıdakı düsturu alarıq:

$$E = \frac{1}{2} \iiint_V \left[(A^T \vec{u})^T D(A^T \vec{u}) \right] dV - \iint_S \vec{p}^T \vec{u} ds - \iiint_V \vec{g}^T \vec{u} dV,$$

burada D - Huk qanununun matrisi, A isə diferensiallama operatorunun matrisidir.

Ədəbiyyat

1. Р.Ю.Амензаде, Г.Ю.Мехтиева, Л.Ф.Фатуллаева. Вариационный метод нелинейной наследственной механики твердых тел // Вестник Чувашского Государственного Педагогического Университета им. И.Я. Яковлева. Серия «Механика предельного состояния», 2010, № 2 (8), с.42-53.

2. M.F.Mekhtiyev, L.F.Fatullayeva, N.I.Fomina. A variational approach to solving the problem of the stability of a gentle arch // International Conference "Modern Problems of Mathematics and Mechanics" devoted to the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics. 23-25 October, 2019, Baku, Azerbaijan, pp.373-375.