

MƏRKƏZİ SÜRÜŞDRÜLMÜŞ DAIRƏ DAXİLİNDƏ TAM NÖQTƏLƏR HAQQINDA

Aslanova N.Ş.

(GDU, Riyaziyyat və informatika fakültəsi)

Natiga.cabbarova@mail.ru

Xülasə: Təqdim olunan işdə yeni üsulla diferensiallanan funksiyalar vasitəsi ilə verilən bir sinif çoxobrazlıların ekstremallığı məsələsinə baxılır. Çoxobrazlıların ekstremallığı Kovalevskaya lemması və Terri probleminə məxsusi integralın yığılma göstəricisi haqda nəticələrin köməyi ilə verilir.

Açar sözlər: Çoxobrazlılar, Diofant yaxınlaşmaları, Lebeq ölçüsü, transsendent ədəd.

Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsində müxtəlif müstəvi $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ oblastlarında tam nöqtələrin (yəni koordinatları tam ədədlər olan nöqtələrin) sayı məsələsinə baxılır. Həndəsi mülahizələr əsasında söyləmək olar ki, belə nöqtələrin sayı təxminən oblastın sahəsinə bərabərdir. Buna görə də tam nöqtələrin sayı üçün aşağıdakı düsturu alırıq:

$$T = |\Omega| + R,$$

burada $|\Omega|$ Ω oblastının sahəsinə, R isə tam nöqtələrin sayı ilə sahənin fərqlini (xətanı) göstərir. Burada əsas məsələ R xətası üçün, $R \rightarrow \infty$ olduqda, mümkün qədər dəqiq qiymətləndirməkdən ibarətdir. Bu məsələyə ilk dəfə dahi alman riyaziyyatçısı K. Qaus tərəfindən baxılmışdır. Qaus göstərmişdir ki, mərkəzi koordinat başlanğıcında olan r radiuslu $x^2 + y^2 \leq r^2$ dairəsi daxilində yerləşən tam nöqtələrin $T(r)$ sayı üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$T(r) = \pi r^2 + R$$

və $R \leq 2\pi\sqrt{2}r$ (K. Qaus (1834)). Bu nəticədən sonra keçən 180 ilə yaxın bir dövr ərzində müxtəlif riyaziyyatçılar Qausun nəticəsini yaxşılaşdırmağa çalışmışlar.

[1] məqaləsində məsələyə ehtimal nəzəriyyəsi nöqtəyi nəzərindən yanaşaraq müəlliflər eyni məsələyə mərkəzi müəyyən istiqamətdə sürüşdürülmüş dairə daxilində tam nöqtələrin sayı haqqında məsələyə baxmışlar. Onlar göstərmişlər ki, tam nöqtələrin sayı ilə dairənin sahəsi arasındakı fərqi modulunun dairə radiusunun kvadrat kökünə nisbəti, radius sonsuzluğa yaxınlaşdıqda, asimptotik orta mənada dairə mərkəzinin Lebeq mənada mütləq kəsilməz paylama funksiyasına yaxınlaşır, yəni

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{N_{\alpha}(R) - \pi R^2}{\sqrt{R}} dR = f(\alpha)$$

burada $N_{\alpha}(R)$ mərkəzi $\alpha \in [0,1]^2$ nöqtəsində olan $\sqrt{R}$ radiuslu dairədə yerləşən tam nöqtələrin sayı, $f(\alpha)$ isə vahid kvadratda mütləq kəsilməz funksiyadır.

Bu məqalədə biz göstəririk ki, qalıq hədd üçün $R = o(r^{1/2}(\log r)^{1/2})$ münasibəti çevrə mərkəzinin müəyyən sürüşdürülməsi zamanı ödənilir. Sürüşmənin dəqiq qiyməti məlum olmadığından biz məsələnin kompüter həllinə müraciət etdik. Bunun üçün verilən addımla vahid kvadrat daha kiçik kvadratlara bölünür. Beləliklə, vahid kvadrat daxilində müəyyən kiçik addımla düz xətlər şəbəkəsi keçirilir. Çevrənin mərkəzi bu düz xətlər şəbəkəsinə aid olan düz xətlərin kəsişmə nöqtələrinə köçürülür (bax şəkil 1). Tutaq ki, vahid kvadrata daxil olan $(u,v) \in [0,1]^2$ nöqtəsi verilmişdir. $N(u,v;r)$ ilə mərkəzi (u,v) nöqtəsində olan r radiuslu dairədə olan tam nöqtələrin sayını işarə edək. İşdə aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur.

Teorem. Elə $(u,v) \in [0,1]^2$ nöqtəsi vardır ki,

$$|N(u,v;r) - \pi r^2| \leq 500\sqrt{r} \quad (1)$$

Bu teoremə əsasən mərkəzi vahid kvadratın nöqtələrində olan dairə daxilində tam nöqtələrin sayının dairənin sahəsindən meylinin mütləq qiymətcə ən kiçik olduğu nöqtə vardır və mərkəzi həmin nöqtədə olan dairə üçün bu qiymət $500\sqrt{r}$ tərtibindədir. (2) bərabər-sizliyində alınan nəticə son nəticəyə yaxındır.

Kompüter hesablamaları üçün aşağıdakı Python 2. 7. 10 versiyasında yazılmış proqramdan istifadə olunmuşdur:

```
import math
R = int(input("insert a radius of a circle"))
H = int(input("insert the number of shifting steps"))
def Disc (k,l):
    i=0
    for x in range(-R,R+1):
        for y in range(-R,R+1):
            while (H*x-k)**2+(H*y-l)**2<=(H*R)**2:
                i+=1
            break
        y+=1
```

```

x+=1
print ("the number of lattice points in the circle is N(R)=", i)
print ("the relative deviation is",(math.pi*R**2-i)/R**(1/2) )

for k in range(H):
    for l in range(H):
        print (k,l)
        Disc (k,l)
        l+=1
    k+=1

```

Burada $H(0,1)$ intervalının neçə bərabər yerə bölündüyünü, R isə çevrənin radiusunu göstərir. Bu parametrlər klaviaturadan daxil edilir. Hesablamalar üçün $H=5$ qəbul olunmuşdur. R üçün isə 200, 300, 500 qiymətləri qəbul olunmuşdur. Alınmış nəticələr hər bir radius üçün aşağıdakı cəvəllərdə qeyd olunmuşdur. Bu cədvəllərdə hər (u,v) ($0 \leq u < H, 0 \leq v < H$) *cütü üçün mərkəzi $(u/H, v/H)$ nöqtəsində olan uyğun radiuslu dairədə tam nöqtələrin $N = N(u,v;r)$ sayı və bu sayın dairənin sahəsindən $d = \frac{\pi r^2 - N(u,v;r)}{\sqrt{r}}$ nisbi meyli göstərilmişdir. u kəmiyyətinin qiymətləri birinci sətirdə, v -nin qiymətləri isə birinci sütunda göstərilmişdir. Cədvəllərdən göründüyü kimi radius böyüdükcə [1]-də olduğu kimi nisbətəin stabilləşməsi müşahidə olunur. Nisbət üçün vergüldən sonra 5 rəqəm saxlanmışdır.

r=200	0	1	2	3	4
0	N=125629, d= 2.45409	N=125644, d= 1.39343	N=125656, d= 0.54491	N=125656, d= 0.54491	N=125644, d= 1.39343
1	N=125644, d=1.39343	N=125661, d= 0.19135	N=125674, d= -.72789	N=125674, d=-0.72789	N=125661, d= 0.19135
2	N=125656, d= 0.54491	N=125674, d= -0.72789	N=125671, d=-0.51575	N=125671, d=-0.51575	N=125674, d=-0.72789
3	N=125656, d= 0.54491	N=125674, d= -0.72789	N=125671, d=-0.51575	N=125671, d=-0.51575	N=125674, d=-0.72789
4	N=125644, d= 1.39343	N=125661, d= 0.19135	N=125674, d=-0.72789	N=125674, d=-0.72789	N=125661, d= 1.39343

r=300	0	1	2	3	4
0	N=282697, d= 2.67537	N=282728, d= 0.88559	N=282724, d= 1.11653	N=282724, d= 1.11653	N=282728, d= 0.88559
1	N=282728, d= 0.88559	N=282746, d=-0.15364	N=282746, d=-0.38458	N=282750, d=-0.38458	N=282746, d=-0.15364
2	N= 282724, d= 1.11653	N=282750, d=-0.38458	N=282770, d=-1.53928	N=282770, d=-1.53928	N=282750, d= 1.11653
3	N= 282724, d= 1.11653	N=282750, d=-0.38458	N=282770, d=-1.53928	N=282770, d=-1.53928	N=282750, d=-0.38458
4	N=282728, d= 0.88559	N=282746, d=-0.15364	N=282750, d=-0.38458	N=282750, d=-0.38458	N=282746, d=-0.15364

r=500	0	1	2	3	4
0	N=785349, d= 2.19865	N=785384, d= 0.63340	N=785368 d= 1.3489	N=785368 d= 1.3489	N=785384, d= 0.63341
1	N=785384, d= 0.63341	N=785395, d=0.14147	N=785397 d=0.05203	N=785397 d=0.05202	N=785395, d=0.14147
2	N=785368, d=1.34895	N=785397, d= 0.05203	N=785423 d=-1.11073	N=785423 d=-1.11073	N=785397, d= 0.05203
3	N=785368, d= 1.34895	N=785397, d= 0.05203	N=785423 d=-1.11073	N=785423 d=-1.11073	N=785397, d= 0.05203
4	N=785384, d= 0.63341	N=785395, d=0.141471	N=785397, d= 0.05203	N=785397, d=0.05203	N=785395, d=0.141471

Ədəbiyyat

1. P. M. Bleher, Z. Cheng, F. J. Dyson, J. L. Lebowitz. Distribution of the Error Term for the Number of Lattice Points Inside a Shifted Circle. Communication in Mathematical Physics 154, 433-469 (1993).