

DÖRD TƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN BİR FƏRQ MƏSƏLƏSİNİN SONLU FƏRQLƏR ÜSULU İLƏ APPROKSİMASİYASI

Əbdulkərimova E.E

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

ebdulkerimova.elnare@mail.ru

Xülasə: *İşdə dörd tərtibli xüsusi törəməli diferensial tənlik üçün sərhəd şərtlərində məchul funksiyanın yüksək tərtibli xüsusi törəmələri və inteqralı iştirak edən bir məsələyə baxılır və bu məsələni ikinci tərtibdən approksimasiya edən fərq məsələsi qurulur.*

Açar sözlər: *diferensial tənlik, sərhəd şərti, fərq məsələsi, approksimasiya.*

Qapalı $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$ oblastında elə kəsilməz $u = u(x, t)$ funksi-yasını tapmalı ki, bu funksiya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x, t), \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T$$

(1)

tənliyini,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \alpha_1 u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \alpha_2 u(l, t) = 0, \\ \frac{\partial^3 u(0, t)}{\partial x^3} = 0, \\ \int_0^l u(x, t) dx = 0, \end{array} \right. \quad 0 \leq t \leq T,$$

(2)

sərhəd şərtlərini və

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

(3)

başlanğıc şərtlərini ödəsin. Burada $f(x,t)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ - məlum və kəsilməz funksiyalar a, α_1, α_2 isə həqiqi ədədlərdir.

Approksimasiya. (1)-(3) məsələsinin həllinə sonlu fərqlər üsulunu tətbiq etməmişdən əvvəl (2)-dəki axırıncı şərtə baxaq və onu bu şərtə ekvivalent olan şərtlə əvəz edək. Bu şərti t dəyişəninə nəzərən iki dəfə diferensiallayaq:

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx = 0,$$

(1) tənliyinə əsasən bu bərabərliyi

$$-a^2 \int_0^l \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} dx + \int_0^l f(x,t) dx = 0,$$

və ya

$$\frac{\partial^3 u(l,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^3} = \frac{1}{a^2} \int_0^l f(x,t) dx,$$

şəklində yazmaq olar.

Bu bərabərlik isə (2)-dəki üçüncü sərhəd şərtini nəzərə almaqla

$$\frac{\partial^3 u(l,t)}{\partial x^3} = \mu(t),$$

$$\mu(t) = \frac{1}{a^2} \int_0^l f(x,t) dx$$

şəklinə düşər.

Beləliklə biz (1)-(3) məsələsi əvəzinə, (1) tənliyinin (2)-dəki ilk üç sərhəd şərtini, (4) şərtini və (3) başlanğıc şərtlərini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə baxacağıq.

Bu məsələnin həllinə sonlu fərqlər üsulunu tətbiq etmək üçün $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$ qapalı oblastında şəbəkə oblastını təyin edək.

Tutaq ki, N və j_0 ədədləri qeyd olunmuş natural ədədlərdir. Ox oxunun $[0, l]$ parçasını N sayda, Ot oxunun $[0, T]$ parçasını isə j_0 sayda bərabər hissələrə bölək və bölgü nöqtələrini uyğun olaraq

$x_n = nh, n = 0, 1, \dots, N, t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0$ ilə işarə edək. Burada $h = \frac{l}{N}, \tau = \frac{T}{j_0}$.

Bu nöqtələrdən koordinat oxlarına paralel çəkilmiş düz xətlərin $\bar{D}$ oblastının daxilində yerləşmiş (x_n, t_j) kəsişmə nöqtələrinin çoxluğunu $\overline{\omega_{h\tau}}$ ilə işarə edək:

$$\overline{\omega_{h\tau}} = \{(x_n, t_j), n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0\}$$

Baxılan məsələnin $u(x,t)$ həllinin $\overline{\omega_{h\tau}}$ şəbəkə oblastının $u(x_n, t_j)$ düyün nöqtələrindəki təqribi qiymətini y_n^j ilə işarə edək. Bir sıra çevirmələrdən

istifadə etməklə, bəzi şərtlər daxilində, baxılan məsələni $O(h^2 + \tau^2)$ dəqiqliyi ilə approksimasiya edən aşağıdakı fərq məsələsi qurulub:

$$\begin{aligned} \frac{y_0^{j+1} - 2y_0^j + y_0^{j-1}}{\tau^2} + \frac{a^2}{h^4} \left[\left(\frac{478}{33} - \frac{100}{11} \alpha_1 h \right) y_0^j - \frac{228}{11} y_1^j + \frac{78}{11} y_2^j - \frac{28}{33} y_3^j \right] = \\ = \frac{36}{11} f\left(\frac{5h}{6}, t_j\right) - \frac{25}{11} f\left(\frac{6h}{5}, t_j\right), \\ \frac{y_1^{j+1} - 2y_1^j + y_1^{j-1}}{\tau^2} + \frac{a^2}{h^4} \left[-\left(\frac{122}{33} - \frac{20}{11} \alpha_1 h \right) y_0^j + \frac{72}{11} y_1^j - \frac{42}{11} y_2^j + \frac{32}{33} y_3^j \right] = \\ = \frac{6}{11} f\left(\frac{5h}{6}, t_j\right) + \frac{5}{11} f\left(\frac{6h}{5}, t_j\right), \\ \frac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2} + \frac{a^2}{h^4} (y_{n-2}^j - 4y_{n-1}^j + 6y_n^j - 4y_{n+1}^j + y_{n+2}^j) = f(x_n, t_j), \\ n = 2, 3, \dots, N-2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{y_{N-1}^{j+1} - 2y_{N-1}^j + y_{N-1}^{j-1}}{\tau^2} + \frac{a^2}{h^4} \left[\frac{32}{33} y_{N-3}^j - \frac{42}{11} y_{N-2}^j + \frac{72}{11} y_{N-1}^j + \left(-\frac{122}{33} + \frac{20}{11} \alpha_2 h \right) y_N^j \right] = \\ + \frac{5}{11} f\left(\ell - \frac{6h}{5}, t_j\right) + \frac{6}{11} f\left(\ell - \frac{5h}{6}, t_j\right) + \frac{4}{11h} \mu(t_j), \\ \frac{y_N^{j+1} - 2y_N^j + y_N^{j-1}}{\tau^2} + \frac{a^2}{h^4} \left[-\frac{28}{33} y_{N-3}^j + \frac{78}{11} y_{N-2}^j - \frac{228}{11} y_{N-1}^j + \left(\frac{478}{33} - \frac{100}{11} \alpha_2 h \right) y_N^j \right] = \\ = -\frac{25}{11} f\left(\ell - \frac{6h}{5}, t_j\right) + \frac{36}{11} f\left(\ell - \frac{5h}{6}, t_j\right) + \frac{24}{11h} \mu(t_j), \\ j = 1, 2, \dots, j_0 - 1, \\ y_n^0 = \varphi_1(x_n), y_n^1 = \bar{\varphi}_2(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6)$$

Burada qurulmuş (5)-(6) fərq məsələsi aşkar fərq məsələsidir. Bu fərq məsələsindən istifadə etməklə, praktiki məsələlərin həllində geniş istifadə olunan qeyri-aşkar fərq məsələsini asanlıqla qurmaq mümkündür.

Ədəbiyyat

1. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972, 418с.
2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971, 552с.