

BEŞ NÖQTƏLİ BİR FƏRQ MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ. HƏLL ALQORİTMİNİN KORREKTLYİYİ VƏ DAYANIQLIĞI

Əbdulkərimova E.E

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

ebdulkerimova.elnare@mail.ru

Xülasə: İşdə dörd tərtibli xüsusi törəməli diferensial tənlik üçün sərhəd şərtlərində məchul funksiyanın yüksək tərtibli xüsusi törəmələri və integralı iştirak edən bir məsələyə uyğun beş nöqtəli fərq məsələsinə baxılır, bu məsələnin klassik qovma üsulu ilə həll alqoritmı verilir və bu alqoritmın korrektiliyi və dayanıqlığı üçün kafi şərtlər tapılır.

Açar sözlər: beş nöqtəli fərq məsələsi, qovma üsulu, üsulun korrektiliyi və dayanıqlığı.

Tutaq ki, qapalı $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$ oblastında kəsilməz olan elə $u = u(x, t)$ funksiyası tapmaq tələb olunur ki, bu funksiya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x, t), \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T \quad (1)$$

tənliyini,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \alpha_1 u(0, t) = 0, & \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \alpha_2 u(l, t) = 0, \\ \frac{\partial^3 u(0, t)}{\partial x^3} = 0, & \\ \int_0^l u(x, t) dx = 0, & \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

sərhəd şərtlərini və

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3)$$

başlanğıc şərtlərini ödəsin. Burada $f(x, t)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ - məlum və kəsilməz funksiyalar a, α_1, α_2 isə həqiqi ədədlərdir.

Baxılan $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$ düzbucaqlı oblastında

$$\overline{\omega_{hr}} = \left\{ (x_n, t_j), x_n = nh, t_j = j\tau, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0, h = \frac{\ell}{N}, \tau = \frac{T}{j_0} \right\}$$

şəbəkə oblastını təyin edib, bu oblastda (1)-(3)məsələsini σ parametrinin istənilən qiymətində approksimasiya edən aşağıdakı beş nöqtəli fərq məsələsinə baxaq:

$$\begin{aligned} c_0 y_0^{j+1} - d_0 y_1^{j+1} + e_0 y_2^{j+1} &= g_0^j, \\ -b_1 y_0^{j+1} + c_1 y_1^{j+1} - d_1 y_2^{j+1} + e_1 y_3^{j+1} &= g_1^j, \\ a_n y_{n-2}^{j+1} - b_n y_{n-1}^{j+1} + c_n y_n^{j+1} - d_n y_{n+1}^{j+1} + e_n y_{n+2}^{j+1} &= g_n^j, \quad n = 2, 3, \dots, N-2, \\ a_{N-1} y_{N-3}^{j+1} - b_{N-1} y_{N-2}^{j+1} + c_{N-1} y_{N-1}^{j+1} - d_{N-1} y_N^{j+1} &= g_{N-1}^j, \\ a_N y_{N-2}^{j+1} - b_N y_{N-1}^{j+1} + c_N y_N^{j+1} &= g_N^j, j = 1, 2, \dots, j_0 - 1. \end{aligned} \quad (4)$$

İsbat olunub ki, (1)-(3) məsələsinə uyğun (4) fərq məsələsinin əmsalları aşağıdakı bərabərliklərlə təyin olunurlar:

$$\begin{aligned}
c_0 &= 8 + \frac{30a^2\sigma\tau^2}{h^4}(3 - 2\alpha_1 h), \quad d_0 = 7 - \frac{120a^2\sigma\tau^2}{h^4}, \quad e_0 = \frac{30a^2\sigma\tau^2}{h^4}, \\
b_1 &= \frac{a^2\sigma\tau^2}{h^4} \left(\frac{122}{33} - \frac{20}{11}\alpha_1 h \right), \quad c_1 = 1 + \frac{72a^2\sigma\tau^2}{h^4}, \quad d_1 = \frac{42a^2\sigma\tau^2}{11h^4}, \quad e_1 = \frac{32a^2\sigma\tau^2}{h^4}, \\
a_n &= e_n = \frac{a^2\sigma\tau^2}{h^4}, \quad b_n = d_n = \frac{4a^2\sigma\tau^2}{h^4}, \quad c_n = 1 + \frac{6a^2\sigma\tau^2}{h^4}, \quad n = 2, 3, \dots, N-2, \\
a_{N-1} &= \frac{32a^2\sigma\tau^2}{33h^4}, \quad b_{N-1} = \frac{42a^2\sigma\tau^2}{11h^4}, \\
c_{N-1} &= 1 + \frac{72a^2\sigma\tau^2}{11h^4}, \quad d_{N-1} = \frac{a^2\sigma\tau^2}{h^4} \left(\frac{122}{33} - \frac{20}{11}\alpha_1 h \right), \\
d_{N-1} &= \frac{a^2\sigma\tau^2}{h^4} \left(\frac{122}{33} - \frac{20}{11}\alpha_1 h \right), \quad a_N = \frac{30a^2\sigma\tau^2}{h^4}, \quad b_N = 7 - \frac{120a^2\sigma\tau^2}{h^4}, \\
c_N &= 8 + \frac{30a^2\sigma\tau^2}{h^4}(3 - 2\alpha_2 h). \tag{5}
\end{aligned}$$

(4) fərq tənliklərinin sağ tərəflərində duran g_n^j , $n = 0, 1, \dots, N$, funksiyaları özlərində $y_{n-2}^{j-1}, y_{n-1}^{j-1}, y_n^{j-1}, y_{n+1}^{j-1}, y_{n+2}^{j-1}$ və $y_{n-2}^j, y_{n-1}^j, y_n^j, y_{n+1}^j, y_{n+2}^j$ məchullarının qiymətlərini saxlayan funksiyalardır.

Beş nöqtəli (4) fərq məsələsini $j = 1$ qiymətindən başlayaraq, ardıcıl olaraq, j -un bütün qiymətlərində məlum qovma üsullarından istifadə etməklə həll etmək olar. Bu üsulun alqoritmi aşağıdakı kardan ibarətdir.

əvvəlcə

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\Delta_n} [\alpha_n + \beta_n (a_n \alpha_{n-1} - b_n)], \quad n = 2, 3, \dots, N-1, \quad \alpha_1 = \frac{d_0}{c_0},$$

$$\alpha_2 = \frac{d_1 - b_1 \beta_1}{c_1 - b_1 \alpha_1};$$

$$\beta_{n+1} = \frac{e_n}{\Delta_n}, \quad n = 2, 3, \dots, N-1, \quad \beta_1 = \frac{e_0}{c_0}, \quad \beta_2 = \frac{e_1}{c_1 - b_1 \alpha_1};$$

$$\gamma_{n+1}^j = \frac{1}{\Delta_n} [g_n^j - a_n \gamma_{n-1}^j - \gamma_n^j (a_n \alpha_{n-1} - b_n)], \quad n = 2, 3, \dots, N,$$

(6)

$$\gamma_1^j = \frac{g_0^j}{c_0}, \quad \gamma_2^j = \frac{g_1^j + b_1 \gamma_1^j}{c_1 - b_1 \alpha_1};$$

$\Delta_n = c_n - \alpha_n \beta_{n-1} + \alpha_n (a_n \alpha_{n-1} - b_n)$, $n = 2, 3, \dots, N$, $\Delta_1 = c_1 - b_1 \alpha_1$, rekurent düsturları vasitəsilə $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ və γ_{n+1} kəmiyyətləri təyin olunurlar;

Daha sonra

$$y_n^{j+1} = \alpha_{n+1} y_{n+1}^{j+1} - \beta_{n+1} y_{n+2}^{j+1} + \gamma_{n+1}^j, \quad n = N-2, N-3, \dots, 0,$$

(7)

$$y_{N-1}^{j+1} = \alpha_N y_N^{j+1} + \gamma_N^j, \quad y_N^{j+1} = \gamma_{N+1}^j,$$

rekurent düsturlarından istifadə etməklə (4) fərq məsələsinin həlli tapılır.

Tərif: Əgər qovma üsulunu (6)-(7) alqoritmində $\Delta_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots, N$, şərti ödənərsə, onda qovma üsulunun alqoritmi korrekt, $|\alpha_{n+1}| + |\beta_{n+1}| \leq 1$, $n = 0, 1, \dots, N - 2$, $|\alpha_N| \leq 1$ şərtləri ödənərsə dayanıqlı alqoritm adlanır.

Aşağıdakı teorem beş nöqtəli fərq məsələsinin korrekt və dayanıqlı olması üçün kafi şərtləri müəyyən edir.

Teorem: Əgər beş nöqtəli (4) fərq məsələsinin əmsalları həqiqi ədədlər olub, $a_n \neq 0$, $n = 2, 3, \dots, N$, $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots, N$, $d_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, $e_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 2$ şərtlərini ödəyərsə və eyni zamanda

$$|c_0| \geq |d_0| + |e_0|, \quad |c_1| \geq |b_1| + |d_1| + |e_1|, \quad |c_N| \geq |a_N| + |b_N|, \quad |c_{N-1}| \geq |a_{N-1}| + |b_{N-1}| + |d_{N-1}|, \\ |c_n| \geq |a_n| + |b_n| + |c_n| + |d_n|, \quad n = 2, 3, \dots, N - 2,$$

(9)

bərabərsizlikləri də ödənərsə və (9) bərabərsizliklərindən heç olmazsa biri ciddi bərabərsizlik kimi doğru olarsa, onda qovma üsulunun alqoritmi korrekt və dayanıqlıdır. (4) fərq məsələsinin qovma üsulu ilə (6)-(7) həll alqoritmının korrekt və dayanıqlı olması haqqında aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem: Tutaq ki, $\sigma > 0$ və $\frac{\tau^2}{h^4} < \frac{7}{120a^2\sigma}$ şərtləri ödənilir. Onda (4) fərq məsələsi üçün (6)-(7) qovma üsulunun alqoritmi korrekt və dayanıqlıdır.

Ədəbiyyat

1. Самарский А.А. , Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М. : Наука, 1978, 592с.