

KOŞI-RİMAN TƏNLIYI ÜÇÜN KVADRATDA QOYULMUŞ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN FREDHOLMLUĞU

Həsənli L.R.

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

levlahasanly@gmail.com

Xülasə: Təqdim olunan işdə vahid kvadratda Koşi-Riman tənliyi üçün qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində Tixonov-Lavrentyev mənaada tərs məsələyə baxılmışdır. Əsas məchullardan əlavə sərhəd şərtinin 3 əmsalı eyni və naməlumdur. Tənliyin fundamental həllindən istifadə etməklə əsas münasibətdən zəruri şərtlər ayrılmışdır. Bu zəruri şərtlərə daxil olan sinqulyarlıqlar saflaşdırılmış və sərhəd şərtindən istifadə etməklə zəruri şərtlərdə olan sinqulyarlıqlar requlyarlaşdırılmışdır. Sonra isə, bu requlyar ifadələr sərhəd şərtləri ilə birlikdə qoyulmuş məsələnin Fredholmluğuna gətirilmişdir.

Açar sözlər: I tərtib elliptik tənlik, Koşi-Riman tənliyi, qeyri-lokal sərhəd şərti, fundamental həll, zəruri şərtlər, requlyarizasiya, Fredholm

Məlumdur ki, I tərtib elliptik tənlik olan Koşi-Riman tənliyi üçün bir çox müxtəlif oblastlarda sərhəd məsələlərinə baxılmışdır. Burada, Koşi-Riman tənliyi üçün vahid kvadratda Tixonov-Lavrentyev mənaada tərs məsələyə baxılmışdır. Belə ki, Koşi-Riman tənliyi üçün qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində 2 şərt vermək kifayət olduğu halda, sərhəd şərtlərinin əmsalında naməlum hədd iştirak etdiyindən 3 sərhəd şərti verilmişdir. Sərhəd şərtləri xətti asılı deyil və Karleman şərti ödəyir.

Aşağıdakı kimi məsələyə baxılır:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, x_k \in (0, 1), k = (1, 2) \quad (1)$$

$$\alpha_{k1}(t)u(t, 0) + \alpha_{k2}(t)u(1, 1-t) + \alpha_{k3}(t)u(1-t, 1) + \alpha_{k4}(t)u(0, t) = \alpha_k(t), k = \overline{1, 3} \quad (2)$$

$$\alpha_{12}(t) = \alpha_{23}(t) = \alpha_{34}(t) = \alpha(t)$$

Məlumdur ki, Koşi-Riman tənliyinin fundamental həlli [1]

$$U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} \quad (3)$$

şəklindədir.

Əsas münasibəti qurmaq üçün tənliyin hər iki tərəfini fundamental həllə vurub, kvadrat üzrə integrallayaq. Ostrogradski-Qauss düsturunu tətbiq etdikdən sonra bu münasibət 2 hissədən ibarətdir: [2]

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \frac{dx_2}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} + \frac{i}{2\pi} \int_0^1 dx_2 \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx_1 \left[\frac{u(x)}{2\pi} \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} \right]_{x_2=0}^1 - \int_0^1 u(x) \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_2} dx_2 \Bigg] + i \int_0^1 dx_2 \cdot \\
&\left[\frac{u(x)}{2\pi} \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} \right]_{x_1=0}^1 - \int_0^1 u(x) \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_1} dx_1 \Bigg] , \\
&\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(x_1, 1)}{1 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} dx_1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(x, 1)}{-\xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} dx_1 + \\
&+ \frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(1, x_2)}{x_2 - \xi_2 + i(1 - \xi_1)} dx_2 - \frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(0, x_2)}{x_2 - \xi_2 - i\xi_1} dx_2 = \begin{cases} u(\xi), \xi \in (0, 1) \\ \frac{1}{2}u(\xi), \xi \in 0, \xi \in 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Bu münasibətin I hissəsi Koşi-Riman tənliyinin kvadratda təyin olunmuş ixtiyari həllini, II hissə isə zəruri şərtləri verir. Bu zəruri şərtləri ayıraq:

$$\begin{aligned}
u(t, 0) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1 - \tau, 1)}{1 + i(1 - \tau - t)} d\tau + \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(\tau, 0)}{(\tau - t)} d\tau - \\
&- \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1, 1 - \tau)}{1 - \tau + i(1 - t)} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(0, \tau)}{\tau - it} d\tau , \\
u(1, 1 - t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1 - \tau, 1)}{t - i\tau} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(\tau, 0)}{1 - t - i(\tau - 1)} d\tau - \\
&- \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1, 1 - \tau)}{-\tau + t} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(0, \tau)}{\tau - 1 + t - i} d\tau , \\
u(1 - t, 1) &= \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1 - \tau, 1)}{-\tau + t} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(\tau, 0)}{1 - i(\tau - 1 + t)} d\tau - \\
&- \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1, 1 - \tau)}{-\tau + it} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(0, \tau)}{\tau - 1 - i(1 - t)} d\tau , \\
u(0, t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1 - \tau, 1)}{1 - t + (1 - \tau)} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(0, \tau)}{t - i\tau} d\tau - \\
&- \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1, 1 - \tau)}{1 - \tau - t + i} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(0, \tau)}{\tau - t} d\tau .
\end{aligned}$$

Alınan zəruri şərtlərin ixtiyari əmsalların köməyi ilə xətti kombinasiyasına baxmaqla sərhəd şərtlərindən istifadə edərək, orada olan sinqulyarlıqlar requlyarlaşdırılır:

$$\begin{aligned}
&\beta_{k1}(t)u(\tau, 0) + \beta_{k2}(t)u(1, 1 - \tau) + \beta_{k3}(t)u(1 - \tau, 1) + \beta_{k4}(t)u(0, \tau) = \\
&= \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{\beta_{k1}(t)u(\tau, 0)}{\tau - t} d\tau + \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{\beta_{k2}(t)u(1, 1 - \tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{\beta_{k3}(t)u(1 - \tau, 1)}{\tau - t} d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{\beta_{k4}(t)u(0, \tau)}{\tau - t} d\tau + \dots = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{[(\beta_{k1}(t) - \beta_{k1}(\tau)) + \beta_{k1}(\tau)]u(\tau, 0)}{\tau - t} d\tau + \\
& + \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{[(\beta_{k2}(t) - \beta_{k2}(\tau)) + \beta_{k2}(\tau)]u(1, 1 - \tau)}{\tau - t} d\tau - \\
& - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{[(\beta_{k3}(t) - \beta_{k3}(\tau)) + \beta_{k3}(\tau)]u(1 - \tau, 1)}{\tau - t} d\tau - \\
& - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{[(\beta_{k4}(t) - \beta_{k4}(\tau)) + \beta_{k4}(\tau)]u(0, \tau)}{\tau - t} d\tau + \dots = \\
& = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{\beta_{k1}(\tau)u(\tau, 0) + \beta_{k2}(\tau)u(1, 1 - \tau) - \beta_{k3}(\tau)u(1 - \tau, 1) - \beta_{k4}(\tau)u(0, \tau)}{\tau - t} d\tau + \dots
\end{aligned} \tag{4}$$

Burada, nöqtələr ilə requlyar həddlərin cəmi işarə edilmişdir.

$\beta_{k1}(t) = \alpha_{k1}(t), \beta_{k2}(t) = \alpha_{k2}(t), -\beta_{k3}(t) = \alpha_{k3}(t), -\beta_{k4}(t) = \alpha_{k4}(t)$ kimi seçsək, onda alarıq ki,

$$\begin{aligned}
& \alpha_{k1}(t)u(\tau, 0) + \alpha_{k2}(t)u(1, 1 - \tau) + \alpha_{k3}(t)u(1 - \tau, 1) + \alpha_{k4}(t)u(0, \tau) = \\
& = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{\alpha_k(t)}{\tau - t} d\tau + \dots, \quad k = \overline{1, 3}
\end{aligned} \tag{5}$$

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq.

Teorem. Əgər xətti asılı olmayan (2) şərtinin verilən əmsalları Hölder sinfindən olub, sağ tərəfləri diferensiallanan funksiyalar olmaqla (0,1) parçasının uclarında sıfır çevrilirlərsə, onda (5) ifadəsi requlyardır.

Ədəbiyyat

1. V.C. Vladimirov, Equations of mathematical physics. Science Publishers, Moscow, 1981.
2. N.A. Aliyev, S.Samadova, Boundary Value Problem in square for Cauchy-Riemann equation (Azeri) Third International Scientific Conference of Young Researchers, Baku, Azerbaijan, 17-18 April, 2015, pp.141-142.