

MATLAB SYMBOLIC TOOLBOX PAKETİNDƏ MATRİS TƏNLİKLƏRİN HƏLLİ

Həsəratov S.Ə.

(Azərbaycan Texniki Universiteti,
Informasiya Texnologiyaları və Telekommunikasiya fakültəsi)
shasratov2018@ada.edu.az

Xülasə: Ədədi hesablamaları yerinə yetirə bilən müasir sistemlərdən biri olan MATLAB riyazi proqramlar paketinin Symbolic Toolbox prosedurundan istifadə edərək matris tənliklər sisteminin yüksək dəqiqlikli həll alqoritmi verilib. Misallarla alınan nəticələr adi və simvol hesablamalarla müqayisə olunub.

Açar sözlər: simvol hesablamalar, matris tənliklər, Lyapunov tənliyi.

MATLAB, MathWorks şirkəti tərəfindən texniki hesablamalar aparmaq üçün yaradılmış yüksək performanslı proqramlaşdırma dilidir. MATLAB sözü, matris laboratoriyası (MATrix LABoratory) mənasını ifadə edir. MATLAB həm də müasir proqramlaşdırma mühitidir [1]. Belə ki, o, verilənlərin strukturlarını, səhvlərin aradan qaldırılması vasitələrini və obyekt yönlü proqramlaşdırmanı özündə birləşdirir. Əlavə olaraq, MATLAB-in ən üstün cəhəti də onun proqramlaşdırma və hesablamalarla yanaşı vizualizasiyanı da təmin etməsidir.

Simvolik riyaziyyat paketinin (Symbolic Math Toolbox) və genişləndirilmiş simvolik riyaziyyat paketinin (Extended Symbolic Math Toolbox) MATLAB - riyazi proqramlar paketinə əlavə edilməsi simvol hesablamaları yerinə yetirməyi daha da yaxşılaşdırır. MATLAB simvolik hesablamalar aparmaq qabiliyyətinə Waterloo Maple Software şirkətinin yaratdığı simvolik prosessor vasitəsilə nail olub.

Simvol proqramlar paketi, simvolik riyaziyyat tənliklərinin həlli, işlənməsi və manipulyasiya edilməsi üçün müxtəlif funksiyalara malikdir. Paket, ali riyaziyyat, xətti cəbr, matrislər nəzəriyyəsi, cəbri və adi diferensial tənliklər, müxtəlif tənliklərin sadələşdirilməsi və tənliklərlə manipulyasiya edilməsi kimi riyazi sahələr üzrə bir çox funksiyaları təmin edir.

Riyaziyyatdan məlum olan xətti cəbri tənliklər sistemini [2] tərs matris üsulu ilə həllinə baxaq.

Tutaq ki,

$$AX = B \quad (1)$$

tənliklər sistemi verilib. Burada, A - verilmiş tənliklər sisteminin əmsallarından düzəldilmiş n ölçülü kvadrat matrisdir, B - sərbəst hədlərdən ibarət n -ölçülü vektordur, X - axtarılan n -ölçülü vektordur.

Fərz edək ki, verilmiş A matrisinin tərsi var. Onda axtarılan X vektoru aşağıdakı münasibətdən təyin olunur.

$$X = A^{-1}B. \quad (2)$$

MATLAB riyazi proqramlar paketində [3,4] (1) tənliyinin həlli aşağıdakı ardıcılıqla həll olunur

1. Tənliyin əmsallarından düzəldilmiş A matrisi və B matrisi simvol dəyişənlər kimi qurulur.

2. Matlab riyazi proqramlar paketinin $\text{inv}(A)$ prosedurundan istifadə olunaraq A^{-1} matrisin tərsi hesablanır.
3. Əgər matrisin tərsi varsa onda (2) ifadəsindən axtarılan həll $X = \text{inv}(A) * B$ tapılır, əks halda həll yoxdur.

Misal 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ və } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ matrisləri verilib.}$$

Axtarılan həll $X = \text{inv}(A) * B$ ifadəsindən hesablanır:

$$X = \begin{bmatrix} -0.2917 \\ 3.75 \\ -16.7083 \\ 29.25 \\ -15.000 \end{bmatrix}$$

Həllin dəqiqliyini yoxlamaq üçün $\text{norm}(A * X - B)$ hesablanır. Burada “norm” matrisin normasını ifadə edir.

$$\text{norm}(A * X - B) = 2.5205\text{e-}13.$$

Misal 2: Tutaq ki, $n \in N$ A matrisi aşağıdakı şəkildə verilib:

$$A = \begin{bmatrix} 1^{n-1} & . & . & . & . & . & 1^1 & 1^0 \\ 2^{n-1} & . & . & . & . & . & 2^1 & 2^0 \\ 3^{n-1} & . & . & . & . & . & 3^1 & 3^0 \\ 4^{n-1} & . & . & . & . & . & 4^1 & 4^0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ (n-1)^{n-1} & . & . & . & . & . & (n-1)^1 & (n-1)^0 \\ n^{n-1} & . & . & . & . & . & n^1 & n^0 \end{bmatrix}, n \in N$$

$$B = [1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 4 \ 0 \ 4 \ 4 \ 2 \ 9 \ 0 \ 10 \ 0 \ 9 \ 12 \ 7]$$

$n = 25$ qiymətində tənliklər sistemini əvvəlcə adi hesablamada həll edək. Onda həllin dəqiqliyi

$$\text{norm}(A * X - B) = 1.0861\text{e}+09$$

Bu əsasən hər bir dəyişənlərə ayrılan sahədə yuvarlaqlaşdırıldığından dəqiqlik itir. Simvol hesablamalar mühitində tənliyi həll etdikdə həllin dəqiqliyi

$\text{norm}(A * X - B) = 0$ olur.

MATLAB riyazi proqramlar paketinin simvol hesablamalar mühitində işləyə bilən yüksək dəqiqlikli cəbri matris Lyapunov tənliyinin həll alqoritminin yaradılmasına baxaq.

Matrisli Lyapunov tənliyi verilib:

$$AX + XA' = C \quad (3)$$

Burada A - ixtiyari tərtibli verilmiş kvadrat matrisdir, C - simmetrik matrisdir. Matris sign funksiya alqoritmindən [5] istifadə edərək (3) tənliyinin həll alqoritmını verək:

Alqoritm:

1. $[A]_s$; $[C]_s$ matrisləri verilib

2. Sifirinci yaxınlaşma olaraq $A_0 = [A]_s$; $C_0 = [C]_s$.

3. Aşağıdakı ifadəni hesablayaq

$$[A_{i+1}]_s = \alpha_i [A]_s + \beta_i [A_i^{-1}]_s, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

Harada ki, $\alpha_i = \frac{1}{1 + |\det(A)|^{1/n}}$ $\beta_i = 1 - \alpha_i$ n- $[A]_s$ matrisin ölçüdür.

3. Əgər $\|A_{i+1} + E\| > \varepsilon$ ödənərsə, $[A_0]_s = [A_{i+1}]_s$; $[C_0]_s = [C_{i+1}]_s$

mənimsətməklə addım3 keçilir, əks halda axtarılan həll $[X]_s = -\frac{1}{2}C_{i+1}$.

Burada E - uyğun ölçülü vahid matrisdir, ε - verilmiş dəqiqlikdir.

Ədəbiyyat

1. Кетков Ю. Л., Кетков А.Ю. Шульц М.М. “MATLAB 6.x: программирование численных методов”, СПб.: БХВ-Петербург, 2004, 752 с.
2. Гантмахер Ф. Р. “Теория матриц”, М.: Наука, 1967, 575 с.
3. Ревинская О. Г. “Основы программирования в MatLab”, учеб. пособие., СПб.: БХВ-Петербург, 2016. – 208 с.
4. Смирнов Г.Б., Томашевич В. Г. “Линейные системы управления в пакете MATLAB”, учебное пособие., Екатеринбург : Изд-во Урал.ун-та, 2018.— 76 с.
5. Kenney C.S., Laub A.J. The matrix sign function // IEEE Trans. Autom.Contr., v.2, № 8, 1995, pp. 1330-1348.