

OPTİMALLAŞDIRMA ÜSULLARININ TƏTBİQ XÜSUSİYYƏTLƏRİ

Həşimov S.A., Həşimova P.M.

(BDU, Təbii riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

s.hashimov@list.ru, pervane.esedzade95@gmail.com

Xülasə: Təqdim olunan işdə optimallaşdırma məsələsini həll etmək üçün məqsəd funksiyaların məxsusi qiymətlərindən və törəmələrindən istifadə edən optimallaşdırma üsullarının tətbiqinin mühüm xüsusiyyətləri öyrənilir.

Açar sözlər: optimallaşdırma məsələsi, məqsəd funksiyası, funksiyanın qradienti.

Çoxdəyişənli məqsəd funksiyalarının ekstremalını tapmaq üçün müxtəlif üsullardan istifadə edilə bilər. Ekstremalın axtarışın təşkili xüsusiyyətlərindən asılı olaraq optimallaşdırma üsullarını iki qrupa bölmək olar:

1. Məqsəd funksiyaların məxsusi qiymətlərindən istifadə edən üsullar;
2. Məqsəd funksiyaların törəmələrindən istifadə edən üsullar.

Sadalanan bu üsullar aşağıdakı iterative bir düsturun istifadəsinə əsaslanır:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} S(x^{(k)}), \quad (1)$$

burada $x^{(k)}$ optimallaşdırılan funksiyanın cari qiyməti; $\alpha^{(k)}$ -addımın uzunluğunu xarakterizə edən bir parametrdir; $S(x^{(k)}) = S^{(k)}$ dəyişənlərin n ölçülü fəzada axtarışının istiqamətidir.

$\alpha^{(k)}$ addımının və $S(x^{(k)})$ istiqamətinin təyin olunmasından asılı olaraq bir sıra optimallaşdırma üsulları müəyyən edilir. Bu üsullardan biri Qradient üsullarıdır.

Qradient üsulları yalnız məqsəd funksiyasının qiymətlərindən istifadə edən birbaşa axtarış üsullarından fərqli olaraq, funksiyanın törəmələri haqqında məlumatların mövcudluğunu tələb edir. Bu məlumatlar məqsəd funksiyasının qiymətlərinin hesablanması və lazımi hesablamaların sayını azaltmağa imkan verir.

Əgər axtarış istiqaməti $S(x^{(k)})$ olaraq funksiyanın antiqradient istiqamətini götürsək, onda alırıq:

$$S(x^{(k)}) = -\nabla f(x^{(k)}),$$

Burada, $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial f}{\partial x_n})$ -funksiyanın qradientidir. Bunu nəzərə alsaq, (1) münasibətindən alırıq:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla f(x^{(k)}) \quad (2)$$

(2) münasibəti enmə üsulu və ya Koşi metodunun tətbiqini müəyyənləşdirir. Bu üsulun hər bir iterasiya prosesində $\alpha^{(k)}$ addımı məlum birölçülü axtarış üsullarından istifadə edərək $f(x^{(k+1)})$ funksiyanın minimumunu tapmaq məsələsini həll etməklə hesablanır.

Bu üsul yüksək etibarlılığa və dayanıqlığa malikdir. Bununla yanaşı, bu üsulun bəzi çatışmazlıqları da var.

(2) də $\alpha^{(k)}$ addımı olaraq müəyyən müsbət α -nı götürsək, aşağıdakı hesablama sxemini alırıq:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}). \quad (3)$$

(3) iterasiya prosesi çoxdəyişənli funksiyanın minimumunu tapmaq üçün ən sadə gradient üsulunun tətbiqini müəyyənləşdirir. Üsulun bir neçə çatışmazlığı var. Bunlardan aşağıdakıları qeyd etmək lazımdır:

- hər bir addımda α parametrin müvafiq qiymətini seçmək lazımdır;
- stasionar nöqtənin ətrafında gradient ∇f kəmiyyətinin kiçikliyi səbəbindən,

üsul minimum nöqtəyə zəif yaxınlaşma ilə xarakterizə olunur.

Yuxarıda göstərilən üsullarla yanaşı, optimallaşdırma məsələlərini həll etmək üçün koordinat enmə üsulu kimi tanınan Gauss-Seydel üsulu da istifadə olunur. Bu üsulun əsas mahiyyəti funksiyanın minimumunun axtarışını ardıcıl olaraq hər bir koordinat üçün təşkil etməkdir. Tutaq ki, $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinatlarının dəyişmə ardıcılığı onların $1, 2, \dots, n$ indeksləri ardıcılığı sırası ilə üst-üstə düşür. Əvvəlcə digər bütün koordinatları sabit saxlayaraq Δx kəmiyyətinin qiyməti qədər x_1 koordinatını dəyişib Δf artımını qiymətini təyin edirik. Əgər $\Delta f > 0$ olarsa, deməli addım səhv istiqamətdə atılır. İstiqamətini dəyişdirib $\Delta f < 0$ şərti ödənənə qədər hərəkət edirik. Sonra müəyyən bir dəqiqliklə minimum nöqtə tapana qədər digər koordinatı x_2 və sairə digər dəyişənləri dəyişdirməyə davam edirik. Metodu həyata keçirərkən digər hesablama sxemlərinin tətbiqi mümkündür.

Bu üsul sadə realizasiya olunması ilə digər üsullardan fərqlənir. Lakin digər üsullarla müqayisədə funksiyanın minimumunu tapmaq üçün daha çox vaxt tələb olunur.

Yuxarıda nəzərdən keçirilmiş üsullarda ardıcıl olaraq məqsəd funksiyanın xətti apraksimasiyası və hər bir addımda məqsəd funksiyanın və onun törəmələrinin qiymətinin hesablanması tələb olunur. Daha ümumi bir strategiya qurmaq üçün $f(x)$ funksiyanın ikinci tərtib törəmələrindən istifadə etmək lazımdır. Məlumdur ki, funksiyanın Teylor sırasına ayrılışının kvadratik hissəsi, xəttə hissəyə nisbətən funksiyanı daha yaxşı apraksimasiya edir. Ona görə də ikinci tərtib törəmə tələb edən üsullardan istifadə etmək zərurəti meydana çıxır. Yuxarıdakı muhakimələrə uyğun olaraq Nyuton üsuluunun tətbiq edilməsi zərurəti meydana çıxır.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \nabla^2 \left(f(x^{(k)}) \right)^{-1} \nabla f(x^{(k)}), \quad (4)$$

burada $\nabla^2 \left(f(x^{(k)}) \right)^{-1} = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^{-1} (i, j = \overline{1, n})$ Hessi matrisinin tərsidir. Hessi matrisinin elementləri $f(x)$ funksiyanın ikinci tərtib xüsusi törəmələrindən ibarətdir. Nyutonun üsulu kvadratik yaxınlaşma sürətini aşkar edir, yəni $\| \varepsilon^{(k+1)} \| = c \| \varepsilon^{(k)} \|^2$ doğrudur.

Burada c Hessian matrisi ilə bağlı sabitdir. $\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^*$, burada x^*

axtarılan həddir. Nyuton üsulu $x^{(0)}$ başlanğıc yaxınlaşmanın seçimindən çox asılıdır.

Nyuton üsulu aşağıdakı şərt daxilində $x^{(0)}$ başlanğıc yaxınlaşmanın istənilən qiymətində yığılır.

$$\|g^{(0)}\| < \frac{1}{2}.$$

Başlanğıc yaxınlaşma $x^{(0)}$ nöqtəsi x^* nöqtəsinə kifayət qədər yaxın məsafədə deyilsə, Nyutonun üsulunun tətbiqi həddindən artıq çox vaxt sərf olunmasına səbəb olur ki, bu da üsulun yığılmamasına səbəb ola bilər. Bu metod iterasiyadan iterasiyaya qədər məqsəd funksiyanın qiymətinin azalmasını təmin edən və Koşi üsulunda olduğu kimi düz bir xətt boyunca axtarış etmək üçün modifikasiya oluna bilər.

Qoşma gradient üsulları Koşi və Nyuton üsullarının müsbət xüsusiyyətlərinə malik olmaqla, yalnız məqsəd funksiyasının birinci tərtib törəmələrinin qiymətlərinin hesablanmasına əsaslanır.

Başlanğıc yaxınlaşma $x^{(0)}$ nöqtəsi x^* nöqtəsinə kifayət qədər yaxın məsafədə olmadığı halda belə bu üsul yüksək etibarlılıq nümayiş etdirməklə, minimum nöqtəyə kifayət qədər tez yığılır. Bu üsulun əsası qoşma istiqamətlər prosedurasının qurulmasından ibarətdir. Bu məqsədlə $f(x)$ funksiyasının kvadratik apraksimasiyasından və qradientinin komponentlərinin qiymətlərindən istifadə olunur. Beləliklə, fərz edək ki, məqsəd funksiyası kvadratik funksiyadır:

$$f(x) = q(x) = a + b^T x + 1/2 x^T C x,$$

və iterasiya prosesi (1) düstura uyğun olaraq həyata keçirilir.

Hər bir iterasiya prosesində axtarış istiqamətləri aşağıdakı münasibətlərdən istifadə edərək müəyyən edilir:

$$S^{(k+1)} = -g^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma^{(i)} S^{(i)} \quad (5)$$

$$S^{(0)} = -g^{(0)}, \quad (6)$$

harada ki $g^{(k)} = \nabla f(x^{(k)}) = \nabla g(x^{(k)}) = C x^{(k)} + b$.

Kvadrat funksiyanın xassələrindən istifadə etsək, alırıq:

$$\Delta g^{(k)} = g(x^{(k)}) - g(x^{(k-1)}) = C(x^{(k)} - x^{(k-1)}) = C \Delta x$$

və C şərtləri $-s^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) qoşma istiqamətləri, (5) düsturundan $\gamma^{(i)}$ parametrini hesablamaq üçün uyğun münasibət əldə edə bilərik. Axtarışın istiqaməti müəyyənləşdirmək üçün ümumi düstur (5) aşağıdakı formada olacaq:

$$S^{(k)} = -g^{(k)} + \frac{\|g(x^{(k)})\|^2}{\|g(x^{(k-1)})\|^2} S^{(k-1)} \quad (8)$$

Əgər $f(x)$ kvadratik bir funksiyadırsa, minimum nöqtəni tapmaq üçün bu istiqamətlərdən $(N - 1)$ sayda tələb olunur və düz bir xətt boyunca N sayda axtarışlar aparılır. Əgər $f(x)$ funksiyası kvadratik deyilsə, istiqamətlərin və uyğun axtarışların sayı artır.

Ədəbiyyat

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2004, -824 с.