

ÇUBUĞUN RƏQS TƏNLIYI ÜÇÜN BİR MƏSƏLƏNİN SONLU FƏRQLƏR ÜSULU İLƏ HƏLLİ VƏ FƏRQ MƏSƏLƏSİNİN DAYANIQLIĞININ TƏDQIQI

Hüseynova A.F

(BDU , Tətbiqi Riyaziyyat və Kibernetika fakultəsi)

ahuseynova739@gmail.com

Xülasə: Təqdim olunan işdə dörd tərtibli xüsusi törəməli differensial tənlik üçün sərhəd şərtlərində məchul funksiyanın 3-cü tərtibədək xüsusi törəmələrinin iştirak etdiyi bir məsələyə baxılır, bu məsələ çubuğun rəqs tənliyi üçün bir məsələdir və bu məsələni ikinci tərtibdən approksimasiya edən fərq məsələsi qurulur və həmin fərq məsələsinin dayanıqlığı tədqiq edilir.

Açar sözlər: diferensial tənlik , sərhəd şərti, fərq məsələsi.

Çubuğun rəqs tənliyi üçün aşağıdakı məsələyə baxaq:

Qapalı $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ oblastında elə kəsilməz $U = U(x, t)$ funksiyası tapmalı ki, bu funksiya

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + f(x, t) \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

tənliyini

$$\frac{\partial^2 U(0, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 U(l, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^3 U(0, t)}{\partial x^3} = 0 \quad \frac{\partial^3 U(l, t)}{\partial x^3} = 0$$

sərhət şərtlərini və

$$\frac{\partial^k U(x, 0)}{\partial t^k} = \phi_k(x) \quad k = 0, 1 \quad (3)$$

başlanğıc şərtlərini ödəsin.

Burada, $\phi_k(x)$ $k = 0, 1$ və $f(x)$ məlum kəsilməz funksiyalar, a isə həqiqi ədəddir.

Bu məsələnin həllinə sonlu fərqlər üsulunu tətbiq etmək üçün $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ qapalı oblastında şəbəkə oblastını təyin edək.

Tutaq ki, N və j_0 ədədləri qeyd olunmuş natural ədədlərdir. Ox oxunun $[0, l]$ parçasını N sayda, Ot oxunun $[0, T]$ parçasını isə j_0 sayda bərabər hissələrə bölək və bölgü nöqtələrini, uyğun olaraq $x_n = nh, n = 0, 1, \dots, N, t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0$ ilə işarə edək. Burada $h = \frac{l}{N}, \tau = \frac{T}{j_0}$ olar. Bu nöqtələrdən koordinant oxlarına

paralel çəkilmiş düz xətlərin $\bar{D}$ oblastının daxilində yerləşmiş (x_n, t_j) kəsişmə nöqtələrinin çoxluğunu $\bar{\omega}_{h\tau}$ ilə işarə edək.

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \{(x_n, t_j) | n = 0, 1, \dots, N, \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0\}$$

Verilmiş məsələnin $U(x, t)$ həllinin $\overline{\omega}_{h\tau}$ şəbəkə oblastının (x_n, t_j) düyün nöqtələrindəki təqribi qiymətini y_n^j ilə işarə edək. Müəyyən çevrilmələrdən istifadə etməklə, bəzi şərtlər daxilində, baxılan məsələnin $O(h^2 + \tau^2)$ dəqiqliyi ilə approksimasiya edən aşağıdakı fərq məsələsi qurulub.

$$\begin{aligned} \frac{y_0^{j+1} - 2y_0^j + y_0^{j-1}}{\tau^2} + \frac{6a}{17h^4} (14y_0^j - 37y_1^j + 16y_2^j - 9y_3^j) &= -5f\left(\frac{12h}{11}, t_j\right) + \frac{5}{6}f\left(\frac{12h}{11}, t_j\right) \\ \frac{y_1^{j+1} - 2y_1^j + y_1^{j-1}}{\tau^2} - \frac{4a}{17h^4} (5y_0^j - 12y_1^j + 15y_2^j - 2y_3^j) &= \frac{6}{17}f\left(\frac{5h}{6}, t_j\right) + \frac{11}{17}f\left(\frac{12h}{11}, t_j\right) \\ \frac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2} - \frac{a}{17h^4} (y_{n-2}^j - 4y_{n-1}^j + 6y_n^j - 4y_{n+1}^j + y_{n+2}^j) &= f(x_n, t_j) \end{aligned}$$

$$n = 2, 3, \dots, N-2$$

$$\begin{aligned} \frac{y_{N-1}^{j+1} - 2y_{N-1}^j + y_{N-1}^{j-1}}{\tau^2} - \frac{4a}{17h^4} (-2y_{N-3}^j + 15y_{N-2}^j - 12y_{N-1}^j + 5y_N^j) &= \frac{6}{17}f\left(l - \frac{5h}{6}, t_j\right) + \frac{11}{17}f\left(l - \frac{12h}{11}, t_j\right) \\ \frac{y_N^{j+1} - 2y_N^j + y_N^{j-1}}{\tau^2} + \frac{6a}{17h^4} (-9y_{N-3}^j + 16y_{N-2}^j - 37y_{N-1}^j + 14y_N^j) &= \frac{72}{17}f\left(l - \frac{5h}{6}, t_j\right) - \frac{55}{17}f\left(l - \frac{12h}{11}, t_j\right) \end{aligned}$$

$$y_n^0 = \phi_1(x_n), \quad y_n^1 = \overline{\phi}_2(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N$$

$$\overline{\phi}_2(x_n) = \phi_1(x_n) + \tau \phi_2(x_n) + \frac{\tau^2}{2} (f(x_n, 0) - a \phi_1^{IV}(x_n))$$

Yuxarıdakı fərq məsələsi aşkar fərq məsələsidir. Bu fərq məsələsindən istifadə edərək qeyri-aşkar fərq məsələsini də asanlıqla qura bilərik.

Ədəbiyyat

1. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972, 418с.
2. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971, 552с