

BEŞ NÖQTƏLİ FƏRQ MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN KORREKTLYİYİ VƏ DAYANIQLIĞI

Hüseynova A.F

(BDU, Tətbiqi Riyaziyyat və Kibernetika fakultəsi)

ahuseynova739@gmail.com

Xülasə: Təqdim olunan diplom işində çubuğun rəqs tənliyinin sonlu fərqlər üsulu ilə həlli və həllin dayanıqlığı məsələsinə baxılır. Bu məsələyə uyğun beş nöqtəli fərq məsələsinə baxılır, bu məsələnin klassik qovma üsulu ilə həll alqoritmi verilir və bu alqoritmın korrektiliyi və dayanıqlığı üçün kafi şərtlər tapılır.

Açar sözlər: beş nöqtəli fərq məsələsi, qovma üsulu, korrektilik və dayanıqlılıq.

Çubuğun rəqs tənliyi üçün $U = U(x, t)$ funksiyası tapmalı ki, bu funksiya

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + f(x, t) \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

tənliyini

$$\frac{\partial^2 U(0, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 U(l, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^3 U(0, t)}{\partial x^3} = 0 \quad \frac{\partial^3 U(l, t)}{\partial x^3} = 0$$

sərhət şərtlərini və

$$\frac{\partial^k U(x, 0)}{\partial t^k} = \phi_k(x) \quad k = 0, 1 \quad (3)$$

başlanğıc şərtlərini ödəsin.

Burada $\phi_k(x)$ $k = 0, 1$ və $f(x)$ məlum kəsilməz funksiyalar, a isə həqiqi ədəddir.

Bu məsələnin həllinə sonlu fərqlər üsulunu tətbiq etmək üçün baxılan $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ qapalı oblastda

$\overline{\omega_{h\tau}} = \{(x_n, t_j), n = 0, 1, \dots, N, t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$ şəbəkə oblastını təyin edib, bu oblastda (1)-(3) məsələsini σ parametrinin istənilən qiymətində approksimasiya edən aşağıdakı beş nöqtəli fərq məsələsinə baxaq

$$\begin{aligned} c_0 y_0^{j+1} - d_0 y_1^{j+1} + e_0 y_2^{j+1} &= g_0^j \\ -b_1 y_0^{j+1} + c_1 y_1^{j+1} - d_1 y_2^{j+1} + e_1 y_3^{j+1} &= g_1^j, \\ a_n y_{n-2}^{j+1} - b_n y_{n-1}^{j+1} + c_n y_n^{j+1} - d_n y_{n+1}^{j+1} + e_n y_{n+2}^{j+1} &= g_n^j, \quad n = 2, 3, \dots, N-2, \\ a_{N-1} y_{N-3}^{j+1} - b_{N-1} y_{N-2}^{j+1} + c_{N-1} y_{N-1}^{j+1} - d_{N-1} y_N^{j+1} &= g_{N-1}^j, \\ a_N y_{N-2}^{j+1} - b_N y_{N-1}^{j+1} + c_N y_N^{j+1} &= g_{N-1}^j, \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1. \end{aligned} \quad (4)$$

İsbat olunub ki, (1)-(3) məsələsinə uyğun (4) fərq məsələsinin əmsalları aşağıdakı bərabərliklərlə təyin olunur.

$$c_0 = 4 - \frac{104a\sigma\tau^2}{17h^4}, \quad d_0 = -27 - \frac{408a\sigma\tau^2}{17h^4}, \quad e_0 = \frac{1036a\sigma\tau^2}{17h^4},$$

$$b_1 = \frac{20a\sigma\tau^2}{17h^4}, \quad c_1 = 1 + \frac{48a\sigma\tau^2}{17h^4}, \quad d_1 = \frac{60a\sigma\tau^2}{17h^4}, \quad e_1 = \frac{8a\sigma\tau^2}{17h^4},$$

$$a_n = -\frac{a\sigma\tau^2}{h^4}, \quad b_n = -\frac{4a\sigma\tau^2}{h^4}, \quad c_n = 1 - \frac{6a\sigma\tau^2}{h^4}, \quad d_n = -\frac{4a\sigma\tau^2}{h^4}, \quad e_n = -\frac{a\sigma\tau^2}{h^4} \quad n = 2, 3, \dots, N-2,$$

(5)

$$a_{N-1} = \frac{8a\sigma\tau^2}{17h^4}, \quad b_{N-1} = \frac{60a\sigma\tau^2}{17h^4}, \quad c_{N-1} = 1 + \frac{48a\sigma\tau^2}{17h^4}, \quad d_{N-1} = \frac{20a\sigma\tau^2}{17h^4}$$

$$a_N = -\frac{1036a\sigma\tau^2}{17h^4}, \quad b_N = 27 + \frac{408a\sigma\tau^2}{17h^4}, \quad c_N = 4 - \frac{104a\sigma\tau^2}{17h^4}$$

g_n $n = 0, 1, 2, \dots, N$ funksiyaları $y_{n-2}^{j-1}, y_{n-1}^{j-1}, y_n^{j-1}, y_{n+1}^{j-1}, y_{n+2}^{j-1}$ və $y_{n-2}^j, y_{n-1}^j, y_n^j, y_{n+1}^j, y_{n+2}^j$ funksiyaları ilə təyin olunan funksiyalardır.

Beş nöqtəli (4) fərq məsələsini $j = 1$ dən başlayaraq ardıcıl olaraq, j -un bütün qiymətlərində məlum qovma üsulundan istifadə etməklə həll etmək olar. Bu üsulun alqoritmi aşağıdakı kimidir:

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\Delta_n} [d_n + \beta_n (a_n \alpha_{n-1} - b_n)] \quad n = 2, 3, \dots, N-1, \quad \alpha_1 = \frac{d_0}{c_0}, \quad \alpha_2 = \frac{d_1 - b_1 \beta_1}{c_1 - b_1 \alpha_1};$$

$$\beta_{n+1} = \frac{e_n}{\Delta_n}, \quad n = 2, 3, \dots, N-1, \quad \beta_{n+1} = \frac{e_n}{\Delta_n}, \quad \beta_2 = \frac{e_1}{c_1 - b_1 \alpha_1};$$

$$\gamma_{n+1}^j = \frac{1}{\Delta_n} [g_n^j - a_n \gamma_{n-1}^j - \gamma_n^j (a_n \alpha_{n-1} - b_n)], \quad n = 2, 3, \dots, N, \quad (6)$$

$$\gamma_1^j = \frac{g_0^j}{c_0}, \quad \gamma_2^j = \frac{g_1^j + b_1 \gamma_1^j}{c_1 - b_1 \alpha_1^j},$$

$$\Delta_n = c_n - a_n \beta_{n-1} + \alpha_n (a_n \alpha_{n-1} - b_n), \quad n = 2, 3, \dots, N, \quad \Delta_1 = c_1 - b_1 \alpha_1$$

rekurrent düsturları vasitəsilə $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ və γ_{n+1}^j kəmiyyətləri təyin olunur. Daha sonra

$$y_n^{j+1} = \alpha_{n+1} y_{n+1}^{j+1} - \beta_{n+1} y_{n+2}^{j+1} + \gamma_{n+1}^j, \quad n = N-2, N-3, \dots, 0,$$

$$y_{N-1}^{j+1} = \alpha_N y_N^{j+1} + \gamma_N^{j+1}, \quad y_N^{j+1} = \gamma_{N+1}^j, \quad (7)$$

rekurrent düsturlarından istifadə etməklə (4) fərq məsələsinin həlli tapılır.

Tərif. Əgər qovma üsulunun (6)-(7) alqoritmində Δ_n -lər üçün $\Delta_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots, N$, şərti ödənərsə, onda qovma üsulunun alqoritmi korrekt, $|\alpha_{n+1}| + |\beta_{n+1}| \leq 1$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-2$ şərtləri ödənərsə dayanıqlı alqoritm adlanır.

Aşağıdakı teorem beş nöqtəli fərq məsələsinin korrekt və dayanıqlı olması üçün kafi şərtləri müəyyən edir.

Tərif. Əgər beşnöqtəli (4) fərq məsələsinin əmsalları həqiqi ədədlər olub

$$a_n \neq 0, \quad n = 2, 3, \dots, N, \quad b_n \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad d_n \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad e_n \neq 0,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N - 2,$$

Şərtləri ödənərsə və eyni zamanda

$$|c_0| \geq |d_0| + |e_0|, \quad |c_1| \geq |b_1| + |d_1| + |e_1|, \quad |c_N| \geq |a_N| + |b_N|, \quad |c_{N-1}| \geq |a_{N-1}| + |b_{N-1}| + |d_{N-1}|,$$

$$|c_N| \geq |a_N| + |b_N| + |d_N| + |e_N|, \quad n = 2, 3, \dots, N - 2$$

bərabərsizlikləri də ödənərsə və (5) bərabərsizliklərindən heç olmazsa biri ciddi bərabərsizlik kimi ödənərsə, onda qovma üsulunun alqoritmi korrekt və dayanıqlı olar.

Teorem. Tutaqki, $\delta > 0$ və $\frac{\tau^2}{h^4} < \frac{1}{4a\delta}$ şərtləri ödənilir. Onda (4)

fərq məsələsi üçün qovma üsulunun alqoritmi korrekt və dayanıqlıdır.

Ədəbiyyat

1. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М. :Мир, 1972, 418с.

2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М. :Наука, 1971, 552с.