

BƏZİ EXTREMAL ÇOXOBRAZLILAR SİNFİ HAQQINDA

İsmayılova L.Q.

(GDU, Riyaziyyat və informatika fakültəsi)

Leman.ismailova.86@list.ru

Xülasə: *Təqdim olunan işdə yeni üsulla diferensiallanan funksiyalar vasitəsi ilə verilən bir sinif çoxobrazlıların ekstremallığı məsələsinə baxılır. Çoxobrazlıların ekstremallığı Kovalevskaya lemması və Terri problemində məxsusi integralın yığılma göstəricisi haqda nəticələrin köməyi ilə verilir.*

Açar sözlər: *Çoxobrazlılar, Diofant yaxınlaşmaları, Lebeq ölçüsü, transsendent ədəd.*

1932 –ci ildə Maler K. ([8]) transsendent ədədlərin təsnifatını verərək aşağıdakı kimi dərəcəsi n -i aşmayan tam əmsallı aşağıdakı çoxhədlilər ailəsinə baxmışdır:

$$\Pi = \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i \mid a_i \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Aşağıdakı kimi təyin olunan

$$h(f) = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|)$$

ədədi $f(x)$ çoxhədlisinin *boyu* adlanır. İxtiyari transsendent α ədədi verilsə, onda bu ədəd Π ailəsindən olan heç bir çoxhədlinin kökü olmayacaqdır. $h > 0$ həqiqi ədəd olarsa, onda, boyu $h - 1$ aşmayan bütün çoxhədlilər çoxluğu sonlu çoxluq olacaqdır. $\omega_n(\alpha)$ ilə bütün elə $\gamma > 0$ müsbət həqiqi ədədlərin $\gamma_0(n)$ dəqiq yuxarı sərhəddini işarə edək ki,

$$|f(\alpha)| < h^{-\gamma}; h = h(f) \quad (1)$$

bərabərsizliyi $h \rightarrow \infty$ olduqda Π ailəsindən olan sonsuz sayda çoxhədlilər üçün doğru olsun. Başqa sözlə desək, ixtiyari kiçik $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə sonsuz artan $h_1, h_2, \dots$ ədədlər ardıcılığı göstərmək olar ki, (1) bərabərsizliyi bütün h_m ədədləri üçün $\gamma = \gamma_0(n) + \varepsilon$ olduqda ödənilir. Bu ədəd hər bir n üçün təyin olunmuşdur və buna görə də aşağıdakı kimi sonlu və ya sonsuz

$$g = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_0}{n}}$$

limiti təyin olunmuşdur. Dirixlenin ([7]) yeşiklər prinsipinə əsasən həmişə $\gamma_0 \geq n$ bərabərsizliyi ödənilir. Maler göstərdi ki, elə bir $\kappa > 0$ sabiti var ki,

$$\|f(\alpha)\| > h^{-\kappa\gamma}; h(f) \leq h$$

münasibəti Π ailəsindən olan bütün çoxhədlilər üçün və Lebeq mənaada sanki bütün transsendent α ədədləri üçün ödənilir. Malerin müəyyən etdiyi qiymət $\kappa = 4 + \varepsilon$ olmuşdur. O belə bir fərziyyə irəli sürmüşdür ki, $\kappa = 1 + \varepsilon$. Yuxarıda deyilənlərdən belə aydın olur ki, bundan kiçik ədəd tapmaq olmaz. Malerin bu fərziyyəsi 1969-cu ildə Sprincuk ([9]) tərəfindən isbat olundu.

Fərz edək ki, kəsilməz diferensiallanan r ölçülü $\Gamma = (f_1(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x}))$, $\bar{x} \in \Omega = [0, 1]^r$ $r < n$ çoxobrazlısı verilmişdir. Xinçinin köçürmə prinsipi hökm edir ki, (1) bərabərsizliyinin sanki bütün həqiqi $\bar{x} \in \Omega = [0, 1]^r$ vektorları üçün doğru olması üçün $\alpha_1 = f_1(\bar{x}), \dots, \alpha_n = f_n(\bar{x})$, ədədlərinin

$$\max(\|\alpha_1 q\|, \|\alpha_2 q\|, \dots, \|\alpha_n q\|) < q^{-1/n}$$

münasibətini ödəməsi zəruri və kafi şərtidir. Beləliklə biz ekstremal çoxobrazlı anlayışına gəlirik.

Aşağıdakı kimi bərabərsizliklər sisteminə baxaq:

$$\max(\|\alpha_1 q\|, \|\alpha_2 q\|, \dots, \|\alpha_n q\|) < q^{-u}, u > 0. \quad (2)$$

$u(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ilə (1) şərtini sonsuz sayda q natural ədədləri üçün ödəyən bütün $u > 0$ ədədlərinin dəqiq yuxarı sərhəddini işarə edək: $u(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sup u$.

Məlumdur ki, $u(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq 1/n$ (bax [6]). Yuxarıda deyilənlərdən aydın olur ki, (1) münasibəti $u < 1/n$ olduqda sonsuz sayda çox natural q ədədləri üçün ödənilir. $u(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1/n$ münasibəti $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$ çoxobrazlıları üçün ödənilsə, onda belə çoxobrazlı *extremal çoxobrazlı* adlanır.

Aşağıdakı kimi kəsilməz diferensiallanan r ölçülü

$$\Gamma = (f_1(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x})), \bar{x} \in \Omega = [0, 1]^r, r < n$$

çoxobrazlısına baxaq. Sprincuk tərəfindən belə bir məsələ qoyulmuşdur: hansı şərt daxilində hökm etmək olar ki, verilən çoxobrazlı extremaldır?

Fərz edək ki, elə natural h ədədi vardır ki, $rh > n$. Aşağıdakı inikaslara baxaq:

$$\varphi_j : \Omega^h \rightarrow \mathbb{R}^n;$$

burada

$$\varphi_j(\bar{x}) = \varphi_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h) = f_j(\bar{x}_1) + \dots + f_j(\bar{x}_h); \bar{x}_s = (x_{s1}, \dots, x_{sr}).$$

Tutaq ki, $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h) \mapsto (\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_h(\bar{x}_h))$ inikasının Yakobi matrisi, başqa sözlə, $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_h(\bar{x}_h)$ funksiyaalarının qradientlərindən düzəlmiş Yakobi matrisi aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{11}} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{hr}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{11}} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{hr}} \end{pmatrix}.$$

Teorem. Əgər

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{\Omega} e^{2\pi i(\alpha_1 f_1(\bar{x}) + \dots + \alpha_n f_n(\bar{x}))} d\bar{x} \right|^{2h} d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

inteqralı yığılan olarsa, onda

$$\Gamma = (f_1(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x}))$$

çoxobrazlısı extremaldır.

Bu teorem Sprincuk tərəfindən qoyulmuş problemin kafi şərt şəklində həllidir. Şərtin zəruri olduğunu güman etmək olar. Teoremin isbatı bəzi köməkçi lemmalara əsaslanır. Bu lemmalardan birincisi Borel-Kantelli lemması adlanır. (bax[9]).

Lemma 1. Tutaq ki, $A_q (q=1,2,\dots)$ R^n fəzasında ölçülən çoxluqlar ardıcılığıdır və

$$\sum_{q=1}^{\infty} \text{mes} A_q < \infty.$$

Onda, sonsuz sayda A_q çoxluqlarına düşən $x \in R^n$ nöqtələrinin ölçüsü sıfıra bərabərdir.

Aşağıdakı lemma isə E.İ. Kavalevskaya lemması adlanır (bax [2,6]).

Lemma 2. Fərz edək ki, m, n, q natural ədədlər, $f_j(\bar{x}), j=1, \dots, N$ isə $\Omega = [0,1]^r, 1 \leq r \leq N$ kubunda ölçülən funksiyalar ardıcılığıdır. $\mu(q)$ ilə elə $\bar{x} \in \Omega = [0,1]^r$ nöqtələr çoxluğunu işarə edək ki,

$$\|f_j(\bar{x})\| < q^{-r_j} (1 \leq j \leq N).$$

Onda elə c_0 sabiti var ki,

$$\mu(q) \leq c_0 q^{-r} \sum_{|c_1| < q^{r_1}} \dots \sum_{|c_N| < q^{r_N}} \left| \int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 f_1(\bar{x}) + \dots + c_N f_N(\bar{x}))} d\bar{x} \right|;$$

burada $r = r_1 + \dots + r_N$.

Teoremin isbatında istifadə olunan daha birvasitə Terri problemində məxsusi integralın yığılma göstəricisi haqda alınmış ([1, 3, 4, 5]) nəticələndir.

Ədəbiyyat

1. Г.И. Архипов, А.А. Карацуба, В.Н. Чубариков. Теория кратных тригонометрических сумм., М.: Наука, 1987.
2. В.И. Берник, Э.И. Ковалевская. Свойство экстремальности некоторых поверхностей в n -мерном Евклидовом пространстве. Мат. заметки (1974), т.15, No 2, с.247-254.
3. И.Ш. Джаббаров. О показателе сходимости особого интеграла многомерной проблемы Терри. Чебышевский Сборник, 14:2 (2013), 74-103.
4. И.Ш. Джаббаров. Об одном тождестве гармонического анализа и его приложениях. Докл. АН СССР, (1990), т.314, No 5, 1052-1054.
5. I.Sh.Jabbarov, G.K. Hasanova. On Mahler Hypothesis // - Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan NAS, - 2019. v. 45, issue 1, - p. 205-212.
6. Э.И. Ковалевская. Совместно экстремальные многообразия. Мат. заметки, (1987), т.41, No 1, 3-8.
7. A. Khintchine. Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen, Circolo mat. Palermo 50, 1926, 175-195.
8. K. Mahler. Über das Mass der Menge aller S-Zahlen. Math. Ann. 1932, v. 106 pp. 131-139.
9. В.Г. Спринджук. Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977.