

BƏRPA PROSESİ ÜÇÜN İNTEQRAL LİMİT TEOREMİ

Məhərrəmov Ə.N.

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

emir.meherremov@mail.ru

***Xülasə:** İşdə asılı olmayan və eyni paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərin cəmi ilə təsvir olunan bərpa prosesinə baxılır. Bərpa etmələrin sayının riyazi gözləməsi ilə ifadə olunan bərpa funksiyasının assimptotikası haqqında teorem isbat edilir. Bu teoremin köməyi ilə bərpa anlarının sayının orta qiyməti üçün təqribi düsturlar tapılmışdır.*

***Açar sözlər:**Bərpa prosesi, bərpa funksiyası, bərpa anı, bərpa anlarının sayı.*

Tutaq ki, $\xi_n, n \geq 1$ asılı olmayan və müsbət qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığıdır.

$$S_0 = 0 \text{ və } S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$$

işarə edək.

Tərif1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ehtimal fəzasında təyin olunan və t parametrindən asılılığı

$$\eta(t) = \max\{k : S_k \leq t\}, t \geq 0 \quad (1)$$

bərabərliyi ilə verilən $\eta(t)$ təsadüfi kəmiyyətlər küllüsünə bərpa prosesi deyilir.

Burada $\eta(t)$ kəmiyyətinin korrekt təyin olunması üçün, əgər bütün k -lar $S_k \leq t$ olarsa, onda

$$\eta(t) = \infty$$

götürəcəyik.

Adətən $\xi_2, \xi_3, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlərin eyni paylanmaya malik olması fərz olunur. ξ_1 təsadüfi kəmiyyətinin paylanması isə ixtiyari ola bilər.

Tərif 2. $\eta(t)$ kəmiyyəti təsadüfi funksiyadır (prosesdir) və onu aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

Əgər həqiqi oxun üzərində $S_0 = 0, S_1, S_2$ nöqtələrini qeyd etsək, onda $t \in [0; 1)$ yarım intervalında $\eta(t) = 0, [S_1, S_2)$ yarım intervalında isə $\eta(t) = 1$ və sairə qiymətlərini alacaqdır.

Çox hallarda $S_k, k \geq 1$ cəmlər ardıcılığı bərpa prosesi adlandırılır. Bəzən isə bu $S_k, k \geq 1$ cəmlər ardıcılığı təsadüfi dolaşma da adlanır. "Bərpa prosesi" termini $\eta(t)$ və $\{S_n\}$ cəmlər ardıcılığın müxtəlif fiziki cihazların işləməsini ifadə etmək üçün istifadə edilməsi ilə əlaqədar istifadə olunur. Məsələn, əgər cihazın fasiləsiz işləmə müddəti ξ_i -olarsa, belə ki, bu müddətdən sonra cihaz sıradan çıxır və yeni element və ya təmiz bərpa tələb edir. Bu halda S_k cəmi k -cı bərpa momentini (anını), $\eta(t)$ isə t -ci ana qədər baş verən bərpaların sayını göstərir.

Bizə məsələnin daha ümumi qoyuluşu lazım gələcək, beləki fərz edəcəyik ki, ξ_k - lar müxtəlif işarəli qiymətlər ala bilərlər. Bu halda biz fərz edəcəyik ki,

$$M\xi_k = a > 0$$

Aydındır ki, müxtəlif işarəli ξ_k -lar üçün də (1) bərabərliyi ilə $\eta(t)$ -ni təyin etmək olar. Asanlıqla göstərmək olar ki, hər bir t üçün

$$\gamma(t) = \eta(t) + 1 = \inf\{k : S_k > t\}$$

kəmiyyəti Markov momenti olur.

Tərif 3. $H(t) = M\eta(t)$ bərabərliyi ilə təyin olunan $H(t)$ funksiyasına bərpa prosesi deyilir. Aşkardır ki, $H(t)$ funksiyası $\{S_k\}$ təsadüfi dolaşmasının t səviyyəsinə birinci dəfə çatmaq üçün addımlarının orta sayını göstərir.

Əgər $\xi_k > 0$ olarsa, onda $\eta(t)$ -ni belə göstərmək olar:

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} J(S_k \leq t)$$

burada $J(A)$ - A hadisəsinin indikatorunu göstərir. Bu halda $H(t)$ üçün aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$H(t) = M\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \leq t)$$

Böyük ədədlər qanununa görə hər bir t üçün $n \rightarrow \infty$ olduqda

$$P(\eta(t) > n) = P(S_n \leq t).$$

olur. Bu isə onu göstərir ki $\eta(t)$ məxsusi təsadüfi kəmiyyətdir (qeyd olunmuş t üçün).

Bərpa nəzəriyyəsinin əsas faktorlarından biri $H(t)$ funksiyasının asimptotik xassələrini ifadə edən bərpa teoremidir.

Əvvəlcə daha sadə diskret hala baxaq, belə ki, fərz edək ki, ξ_k təsadüfi kəmiyyətləri müəyyən bir müsbət ədədin misillərin alır, ümumiliyi pozmadan bu müsbət ədədi vahid qəbul edək. Bu halda $P(\xi_1 < t), P(\xi_k < t), k \geq 2$ və $H(t)$ funksiyaları t -nin tam qiymətlərində təyin olunurlar:

$$t = i, i = 1, 2, \dots$$

Aydın ki,

$$h(k) = H(k) - H(k-1) = \sum_{j=1}^{\infty} P(S_j = k)$$

bərabərliyi $\{S_j\}$ cəmlərinin k nöqtəsinə düşmə sayının riyazi gözləməsini ifadə edir. İşarə edək:

$$q_k = P(\xi_1 = k), P_k = P(\xi_j = k), j \geq 2.$$

Tərif 4. Əgər

$$q_k = \frac{1}{a} \sum_{j=k}^{\infty} P_j, k = 1, 2, \dots, \sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1$$

olarsa, onda $\eta(t)$ bərpa prosesi bircins proses adlanır və $\eta_0(t)$ kimi işarə olunur.

Əgər

$$P(z) = Mz^{\xi_2} = \sum_{k=1}^{\infty} P_k z^k$$

doğuran funksiya olarsa, onda ξ_1 -in doğuran funksiyası

$$q(z) = Mz^{\xi_1} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k$$

doğuran funksiyası belə olar:

$$q(z) = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{j=k}^{\infty} P_j = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} P_j \sum_{k=0}^{-1} x^k = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} P_j \frac{1-z^j}{1-z} = \frac{z(1-P(z))}{a(1-z)}.$$

Ədəbiyyat

1. А.А Боровков, "Вероятностные процессы в теории массового обслуживания" М."Наука", 367 с., 1979.
2. M.Woodroffe, Nonlinear renewal Theory in sequential analysis SIAM, 110 p., 1982.