

İKİNCİ TƏRTİB ADI DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ VARIASIYA BƏRABƏRSİZLİYİ ŞƏKLİNDƏ ZƏRURİ ŞƏRT

Mirzəyeva S.M., Əfəndiyeva A.T.

(LDU, Təbiyyat fakültəsi; BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

mirzayeva_salima@mail.ru, aytek@mail.ru

Xülasə: İş Lions funksionalı tipində keyfiyyət meyarı ikinci tərtib adi diferensial tənlik üçün optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün zəruri şərtlərin alınmasına həsr edilmişdir. Keyfiyyət meyarı Lions funksionalı şəklində verildikdə ikinci tərtib adi diferensial tənlik üçün optimal idarəetmə məsələsində variasiya bərabərsizliyi şəklində zəruri şərt alınır.

Açar sözlər: Keyfiyyət meyarı, Lions funksionalı, variasiya bərabərsizliyi, optimal idarəetmə məsələsi.

$$\tilde{V} \equiv \{v = v(x) = (v_0(x), \tilde{v}_1(x), w(x)) \in H = (L_2(a, b))^3 :$$

$$b_0 \leq v_0(x) \leq \tilde{b}_0, \quad 0 \leq \tilde{v}_1(x) \leq b_1, \quad \bigvee^0 x \in (a, b), \tilde{v}_1 = \tilde{v}_1(b) = 0, \|w\|_{L_2(a, b)} \leq b_2 \}$$

çoxluğunda

$$J_\alpha(v) = \|u_1 - u_2\|^2 + \alpha \|v - \omega\|_H^2 \quad (1)$$

funksionalının

$$\rho \frac{d^2 u_k}{dx^2} + \frac{1}{x} \tilde{v}_1(x) \frac{du_k}{dx} - v_0(x) u_k = w(x), \quad a < x < b, k = 1, 2, \quad (2)$$

$$u_1(a) = u_1(b) = 0, \quad \frac{du_2(a)}{dx} = \frac{du_2(b)}{dx} = 0 \quad (3)$$

şərtləri daxilində minimumunun tapılması haqqında optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Burada $a, b, b_0, \tilde{b}_0, b_1, b_2, \rho > 0, \alpha \geq 0$ verilmiş ədədlər, $\omega = \omega(x) = (\omega_0(x), \omega_1(x), \omega_2(x)) \in H$ verilmiş elementdir.

Hər bir $v \in \tilde{V}$ üçün (2), (3) şərtlərindən $u_k = u_k(x) \equiv u_k(x; v), k = 1, 2$ funksiyalarının təyini məsələsini reduksiya olunmuş məsələ adlandıracağıq ki, onun həlli dedikdə sanki bütün $x \in (a, b)$ üçün (2) tənliyini və (3) şərtlərini ödəyən $u_1 \in \overset{0}{W}_2(a, b), u_2 \in W_2^2(a, b)$ funksiyalarını başa düşəcəyik.

(1)-(3) optimal idarəetmə məsələsi üçün aşağıdakı şəkildə Hamilton-Pontryagin funksiyasını daxil edək:

$$\begin{aligned} H(x, u_1(x), u_2(x), v(x), \psi_1(x), \psi_2(x)) = & - \left(\frac{1}{x} \frac{du_1(x)}{dx} \psi_1(x) + \frac{1}{x} \frac{du_2(x)}{dx} \psi_2(x) \right) \tilde{v}_1(x) + \\ & + (u_1(x) \psi_1(x) + u_2(x) \psi_2(x)) v_0(x) + (\psi_1(x) + \psi_2(x)) w(x) - \alpha (v_0(x) - \omega_0(x))^2 - \\ & - \alpha (\tilde{v}_1(x) - \omega_1(x))^2 - \alpha (w(x) - \omega_2(x))^2, \end{aligned} \quad (4)$$

burada $u_k = u_k(x) \equiv u_k(x; v), k = 1, 2 - (2), (3)$ reduksiya olunmuş məsələnin həlli, $\psi_k = \psi_k(x) \equiv \psi_k(x; v), k = 1, 2$ funksiyaları isə $v \in \bar{V}$ qoşma məsələnin həllidir.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. Tutaq ki, $\omega \in H$ – verilmiş elementdir. Onda $\tilde{V}$ çoxluğunda $J_\alpha(v)$ funksionalı Freşe mənadı diferensiallandıdır və onun qradienti üçün aşağıdakı ifadə doğrudur :

$$J'_\alpha(v) = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\left(\frac{\partial H}{\partial v_0}, \frac{\partial H}{\partial \tilde{v}_1}, \frac{\partial H}{\partial w}\right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial v_0} = u_1(x)\psi_1(x) + u_2(x)\psi_2(x) - 2\alpha(v_0(x) - \omega_0(x)), \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{v}_1} = -\frac{1}{x} \frac{du_1(x)}{dx} \psi_1(x) - \frac{1}{x} \frac{du_2(x)}{dx} \psi_2(x) - 2\alpha(\tilde{v}_1(x) - \omega_1(x)), \quad (7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \psi_1(x) + \psi_2(x) - 2\alpha(w(x) - \omega_2(x)). \quad (8)$$

Bu teoremdən istifadə etməklə variasiya bərabərsizliyi şəklində aşağıdakı zəruri şərt isbat edilmişdir.

Teorem 2. Tutaq ki, teorem1-nin şərtləri ödənilir, $\omega \in H$ – verilmiş elementdir və $\tilde{V}$ çoxluğu aşağıdakı şəkildə təyin edilmişdir.

$$\tilde{V} \equiv \{ v = v(x) = (v_0(x), \tilde{v}_1(x), w(x)), v_0 \in L_2(a, b), \tilde{v}_1 \in L_2(a, b), w \in L_2(a, b), \quad (9)$$

$$b_0 \leq v_0(x) \leq \tilde{b}_0, \quad 0 \leq \tilde{v}_1(x) \leq b_1, |w(x)| \leq b_2, \quad \forall x \in (a, b), \tilde{v}_1(a) = \tilde{v}_1(b) = 0 \}$$

Onda $v^* \in \tilde{V}$ idarəetməsinin (1)-(3), (9) məsələsinin həlli olması üçün

$$H(x, u_1^*(x), u_2^*(x), v^*(x), \psi_1^*(x), \psi_2^*(x) =$$

$$= \max_{v \in D} H(x, u_1^*(x), u_2^*, v, \psi_1^*(x), \psi_2^*(x)), \quad \forall x \in (a, b)$$

şərtinin ödənməsi zəruridir. Burada

$D = [b_0, \tilde{b}_0] \times [0, b_1] \times [-b_2, b_2]$, $u_k^* = u_k^*(x) \equiv u_k(x; v^*)$, $\psi_k^* = \psi_k^*(x) \equiv \psi_k(x; v^*)$, $k = 1, 2$, uyğun olaraq reduksiya olunmuş və qoşma məsələlərin $v = v^*$ olduqda həlləridir.

Ədəbiyyat

1. S.M.Mirzoyeva. Existence and uniqueness of the solution of a problem on optimal control of ecological systems described by ordinary differential equations // Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası. Xəbərlər Riyaziyyat seriyası, XXXII buraxılış, N4, Bakı 2012, səh. 109-117.

2. С.М.Мирзоева. Необходимое условие в задаче оптимального управления экологическими системами //Ученые записки Орловского государственного университета. Научный журнал ,№3(53), математические науки, Орел 2013, стр.39