

SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİNƏ EKSPONENSİAL FUNKSIYALAR DAXİL OLAN BİR SPEKTRAL MƏSƏLƏNİN HƏLLİNİN QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ HAQQINDA

Rəhimli G.M.

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

Grehimli97@mail.ru

Xülasə: İşdə sərhəd şərtlərinə eksponensial funksiyalar daxil olan spektral məsələnin məxsusi ədədlərinin ifadəsi tapılmış, Qrin funksiyası vasitəsi ilə spektral məsələnin həlli qurulmuş, həll və həllin törəmələri üçün zəruri qiymətlənmələr isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: spektral məsələ, xarakteristik determinant, eksponensial funksiya.

Təqdim olunan işdə sərhəd şərtlərinə eksponensial funksiyalar daxil olan aşağıdakı şəkilli spektral məsələyə baxılır.

$$y'' - \lambda^2 y = -\varphi_0(x) - \lambda \varphi_1(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} y(0, \lambda) + \alpha e^{\lambda \omega} y(1, \lambda) &= \tilde{\psi}_0(\lambda) \\ e^{\lambda \omega} y(0, \lambda) + \beta y(1, \lambda) &= \tilde{\psi}_1(\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Burada, $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ məlum funksiyalar, $\tilde{\psi}_0(\lambda), \tilde{\psi}_1(\lambda)$ - λ kompleks parametrinin məlum funksiyaları olub, Laplas mənadı orijinaldırlar və $\omega > 0$.

$h(x, \lambda) = -\varphi_0(x) - \lambda \varphi_1(x)$ işarə edək. (1), (2) spektral məsələni iki məsələyə ayıraq:

$$A) \quad y'' - \lambda^2 y = h(x, \lambda), \quad 0 < x < 1 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} y(0, \lambda) + \alpha e^{\lambda \omega} y(1, \lambda) &= 0 \\ e^{\lambda \omega} y(0, \lambda) + \beta y(1, \lambda) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

$$h(x, \lambda) = -\varphi_0(x) - \lambda \varphi_1(x)$$

$$B) \quad y'' - \lambda^2 y = 0 \quad (3')$$

$$\left. \begin{aligned} y(0, \lambda) + \alpha e^{\lambda \omega} y(1, \lambda) &= \tilde{\psi}_1(\lambda) \\ e^{\lambda \omega} y(0, \lambda) + \beta y(1, \lambda) &= \tilde{\psi}_2(\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (2'')$$

(3') – tənliyinin xətti asılı olmayan $y_1(x, \lambda) = e^{\lambda x}$, $y_2(x, \lambda) = e^{-\lambda x}$ həlləri mövcuddur və məlumdur ki, spektral məsələnin xarakteristik determinant aşağıdakı qaydada qurulur:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \alpha e^{\lambda(\omega+1)} & 1 + \alpha e^{\lambda(\omega-1)} \\ e^{\lambda \omega} + \beta e^{\lambda} & e^{\lambda \omega} + \beta e^{-\lambda} \end{vmatrix} = e^{\lambda \omega} + \beta e^{-\lambda} + \alpha e^{\lambda(2\omega+1)} + \alpha \beta e^{\lambda \omega} - e^{\lambda \omega} - \beta e^{\lambda} - \alpha e^{\lambda(2\omega-1)} - \alpha \beta e^{\lambda \omega} = \beta e^{-\lambda} - \beta e^{\lambda} + \alpha e^{\lambda(2\omega+1)} - \alpha e^{\lambda(2\omega-1)}.$$

Deməli,

$$\Delta(\lambda) = \beta e^{-\lambda} - \beta e^{\lambda} + \alpha e^{\lambda(2\omega+1)} - \alpha e^{\lambda(2\omega-1)}$$

(4)

Əgər $\Delta(\lambda) \neq 0$ isə onda A. məsələsinin həlli

$$y(x, \lambda, h) = \int_0^1 G_1(x, \xi, \lambda) h(\xi, \lambda) d\xi \quad (5)$$

şəklində olur və burada, $G_1(x, \xi, \lambda)$ A) spektral məsələsinin Qrin funksiyasıdır.

B) məsələsinin həlli

$$Q(x, \lambda, \tilde{\psi}_1(\lambda), \tilde{\psi}_2(\lambda)) = [e^{\lambda} - e^{-\lambda}]^{-1} \{ [\tilde{\psi}_1(\lambda) e^{-\lambda} - \tilde{\psi}_2(\lambda)] e^{\lambda x} + [\tilde{\psi}_2(\lambda) - \tilde{\psi}_1(\lambda) e^{\lambda}] e^{-\lambda x} \} \quad (6)$$

şəklində olur.

A) və B) spektral məsələlərinin həllərinin analitikliyi, həll və həllin törəmələri üçün qiymətlənmələr isbat olunur.

İsbat olunur ki, $\lambda \in P_n^+$ və $\omega > 1$ olduqda

$$|\Delta(\lambda)| \geq \frac{1}{2} |\alpha \beta| \|\lambda\| e^{\lambda(2\omega+1)} \quad (7)$$

qiymətlənməsi doğrudur, burada $P_n^+ = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > h\}$.

Əgər $\lambda \in P_n^-$ və $0 < \omega < 1$ olarsa,

$$|\Delta(\lambda)| \geq \|\lambda\| e^{-\lambda}$$

(8)

qiymətlənməsi doğrudur, burada $P_n^- = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < -h\}$.

Digər hallarda da müəyyən qiymətlənmələr isbat olunur. (7), (8) qiymətlənmələrinin köməyi ilə spektral məsələnin həlli və həllin törəmələri üçün

$$\left| \frac{d^k y(x, \lambda, h)}{dx^k} \right| \leq C_0 |\lambda|^{k-2} \left| e^{-2\lambda\omega} \right| \left\| e^{C|\lambda|(x-\omega-1)} \right\| ,$$

$k=0,1,2$

qiymətlənmələri doğrudur. Oxşar qiymətlənmələri (6) funksiyası üçün də isbat etmək olar.

Ədəbiyyat

1. Лаврентьев М.А, Шабат Б.В. Методы теории комплексного переменного (Наука, М.,1973)
2. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла (Наука, М.,1964)