

DETERMINƏ OLUNMUŞ PROQNOZ FONUNDA DISPERSİYANIN QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

Rəhimova G. Ə.

(NDU, İnformatika kafedrası)

gularaisayeva@mail.ru

Xülasə: Təqdim olunan işdə determinə olunmuş və təsadüfi proqnoz fonunda asılı dəyişənin proqnoz qiymətlərinin dispersiyalarını qiymətləndirmə metodlarının xüsusiyyətlərinə baxılmışdır. Bu zaman ciddi riyazi tələblərə müraciət etmədən $\hat{y}_{t+1}$ proqnozunun dispersiyasının qiymətləndirilməsinə ümumi yanaşılmışdır.

Açar sözlər: determinə olunmuş proqnoz, ekonometrik proqnozlaşdırma, dispersiya, proqnoz səhvi, ekonometrik model

Məlum səhvli proqnoz fonu təsadüfi adlanır. Ümumilik prinsipinə məhdudiyyət qoymadan fərz edək ki, $\hat{y}_{t+1}, \hat{y}_{t+2}, \dots$ proqnozları səhvi avtokorrelyasiya rabitələrinin olması ilə xarakterizə olunan xətti ekonometrik modeldən istifadə etməklə alınıb. Ekonometrik proqnozun tərtib olunması prosedurasına uyğun olaraq, baxılan y asılı dəyişənin qiymətini, (məs., $T+1$ zaman anında (onun parametrlərinin təsadüfi kəmiyyətlər olduğu faktını nəzərə alsaq)) (1) tipli xətti modellə müəyyən edilən təsadüfi kəmiyyət kimi, asılı olmayan faktorların $x_{i,t+1}$ $i=1,2,\dots,n$ qiymətlərini isə determinə olunmuş kəmiyyət kimi təsvir etmək olar:

$$y_{T+1} = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1,T+1} + \dots + \alpha_n x_{n,T+1} + \varepsilon_{T+1}, \quad (1)$$

$\alpha_i=0,1,\dots,n$ ekonometrik modelin təsadüfi kəmiyyət kimi baxılan əmsalları; ε_{T+1} isə $T+1$ anında modelin təsadüfi səhvidir. α_i -ləri onların riyazi gözləmələri və səhvlərinin cəmi şəklində ifadə edək:

$$\alpha_i = a_i + \Delta a_i \quad (2)$$

a_i riyazi gözləmə, Δa_i səhvlərinin xarakteristikaları isə, ƏKKÜ-na görə,

$$\Delta a = (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot \varepsilon$$

vektorunun elementləri kimi müəyyən edilib.

(2)-ni (1)-də yerinə qoysaq, nəticədə alırıq:

$$Y_{T+1} = \hat{Y}_{T+1} + \Delta y_{T+1} \quad (3)$$

$$\hat{Y}_{T+1} = a_0 + a_1 \cdot X_{1,T+1} + \dots + a_n \cdot x_{n,T+1} \quad (4)$$

göstəricisi proqnozun riyazi gözləməsini,

$$\Delta Y_{T+1} = \Delta a_0 + \Delta a_1 \cdot x_{1,T+1} + \dots + \Delta a_n \cdot x_{n,T+1} + \varepsilon_{T+1} \quad (5)$$

göstəricisi isə proqnozun səhvinin xarakterizə edir [1]. Onun dispersiyası klassik

$$\sigma^2(Y_{T+1}) = M[Y_{T+1} - \hat{Y}_{T+1}]^2 = M[\Delta Y_{T+1}]^2 \quad (6)$$

ifadəsinə görə (fərz olunur ki, modelin ε_{T+1} səhvi ilə modelin Δa_i əmsallarının səhvləri arasında asılılıq yoxdur) aşağıdakı kimi müəyyən edilə bilər:

$$\begin{aligned} M[\Delta Y_{T+1}]^2 &= M[\Delta a_0 + \Delta a_1 \cdot x_{1,T+1} + \dots + \Delta a_n \cdot x_{n,T+1} + \varepsilon_{T+1}]^2 = \\ &= \sum_{i=0}^n \sigma_{a_i}^2 \cdot x_{i,T+1}^2 + \sum_{i \neq j} \text{cov}(a_i, a_j) \cdot x_{i,T+1} \cdot x_{j,T+1} + \sigma_e^2 \end{aligned} \quad (7)$$

harada ki, σ_e^2 - modelin səhvinin dispersiyasının qiymətidir və $\sigma_e^2 = \sigma_{e,T+1}^2$

$\sigma_{a_i}^2$ - a_i -nin qiymətləndirilməsinin dispersiyası, $\text{cov}(a_i, a_j)$ - a_i və a_j parametrlərinin qiymətlərinin kovariasiyasıdır. Bu kəmiyyətlərin qiymətləri $\sigma_e^2 \cdot (X' \cdot X)^{-1} \cdot (X_{0,T+1} = 1)$ kovariasiya matrisinin elementləri kimi müəyyən edilib [2].

(6) ifadəsi modelin $T+1$ anındakı ε_{T+1} səhvindən və Δa_i əmsallarının səhvlərinin asılı olmaması şərtindən (fərziyyəindən) alınır. Bu əmsalların səhvləri uyğun olaraq modelin ε_t , ($t=1,2,\dots,T$) seçmə səhvlərinin xətti funksiyalarıdır. (6) ifadəsi matris şəklində aşağıdakı kimi ifadə oluna bilər: $\sigma^2(Y_{T+1}) = X'_{T+1} \cdot \text{COV}(a) \cdot x_{T+1} + \sigma_e^2 = \sigma_e^2 \cdot X'_{T+1} \cdot (X' \cdot X)^{-1} \cdot x_{T+1} + \sigma_e^2 = \sigma_e^2 \cdot (x'_{T+1} \cdot (X' \cdot X)^{-1} \cdot x_{T+1} + 1)$ (8) harada ki, $x'_{T+1} = (1, x_{1,T+1}, \dots, x_{n,T+1})$ - asılı olmayan faktorların $T+1$ anlarındakı qiymətlər toplusunu təsvir edən proqnoz fonunun determinə olunmuş səviyyələrinin sətir vektorudur. (8)-in daha ciddi isbatını verək.

Bunun üçün proqnozun hesablanmış $\tilde{Y}_{T+1}$ qiymətini vektor şəklində yazaq:

$$\hat{Y}_{T+1} = x'_{T+1} \cdot a \quad (9)$$

Analoji olaraq proqnozun həqiqi qiymətini də vektor şəklində ifadə etmək olar:

$$Y_{T+1} = x'_{T+1} \cdot a + \varepsilon_{T+1} \quad (10)$$

a -modelin parametrlərinin qiymətlərinin sütun vektoru, ε_{T+1} həqiqi proqnoz səhvinin qiymətidir. (9) və (10)-u nəzərə alaraq (10) ifadəsinə uyğun olan proqnoz səhvinin aşağıdakı kimi ifadə edək:

$$\Delta Y_{T+1} = Y_{T+1} - \hat{Y}_{T+1} = \varepsilon_{T+1} + x'_{T+1} \cdot a - x'_{T+1} \cdot a = \varepsilon_{T+1} + x'_{T+1} \cdot a - x'_{T+1} (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot y \quad (11)$$

Y - asılı dəyişənin müşahidə olunan qiymətlər vektoru əvəzinə (11)-də (12) ifadəsini yazaraq:

$$y = X \cdot \alpha + \varepsilon \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta Y_{T+1} &= \varepsilon_{T+1} + x'_{T+1} \cdot \alpha - x'_{T+1} \cdot (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot (X \cdot \alpha + \varepsilon) = \\ &= \varepsilon_{T+1} + x'_{T+1} \cdot \alpha - x'_{T+1} \cdot (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot \varepsilon = \varepsilon_{T+1} - x'_{T+1} \cdot (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

(12) ifadəsi nəzərə alınmaqla $\hat{Y}_{T+1}$ proqnoz səhvinin dispersiyası aşağıdakı kimi müəyyən edilir:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\hat{Y}_{T+1}) &= M[\Delta Y_{T+1}^2] = M[\varepsilon_{T+1}^2] - 2 \cdot x'_{T+1} \cdot (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot M[\varepsilon_{T+1} \cdot \varepsilon] + \\ &+ x'_{T+1} \cdot (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot M[\varepsilon \cdot \varepsilon'] \cdot X \cdot (X' \cdot X)^{-1} \cdot x_{T+1} \end{aligned} \quad (13)$$

Modelin səhvlər vektorunda ε və ε_{T+1} səhvinin asılı olmaması, homoskedastlıq və səhvlər vektorunda avtokorrelyasiya rabitələrinin olmaması fərziyyələri həqiqətdirsə, onda

$$M[\varepsilon_{T+1} \cdot \varepsilon] = 0; M[\varepsilon \cdot \varepsilon'] = \sigma_e^2 \cdot E.$$

Bu halda, $M[\varepsilon_{T+1}^2] = \sigma_e^2$ olduğunu nəzərə alsaq, göstəmək olar ki, $\sigma_e^2 - ni \quad \sigma_e^2$ ilə əvəz etməklə (13) ifadəsi (8) ifadəsinə çevrilir. (13) ifadəsi ekonometrik modeldəki səhvin mümkün olan bütün xüsusiyyətlərini əks etdirir. Əgər bu səhvə avtokorrelyasiya rabitələri varsa, məsələn, l -ci tərtib, başqa sözlə,

$$\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + v_t, \quad v_t \sim N(0, \sigma_v^2), \quad \text{cov}(v) = \sigma_v^2 \cdot E$$

ödənilirsə, onda (13) ifadəsi aşağıdakı şəkllə düşür:

$$\sigma^2(\hat{Y}_{t+1}) = \sigma_e^2 - 2 \cdot \sigma_e^2 \cdot x'_{t+1} \cdot (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot R + x'_{t+1} \cdot (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot \text{COV}(\varepsilon) \cdot X \cdot (X' \cdot X)^{-1} \cdot x_{t+1} \quad (14)$$

harada ki, $\rho - 1$ -ci tərtib avtokorrelyasiya əmsalıdır. $R = [\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^{T+1}]$ sütun-vektordur [3].

$$\text{COV}(\varepsilon) = \sigma_e^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho^2 & \dots & \rho^{T-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Belə model üçün proqnozun riyazi gözləməsi :

$$\hat{Y}_{t+1} = M[Y_{t+1}]$$

kimi təyin olunacaq :

$$M[Y_{t+1}] = M[x'_{t+1} \cdot x \cdot \varepsilon_{t+1}] = M[x'_{t+1} \cdot x + \rho \cdot \varepsilon_t + v_t] = x'_{t+1} \cdot \alpha \cdot \rho \cdot \varepsilon_t. \quad (15)$$

Modelin T anındakı ε_T səhvinin e_t qiyməti ilə ifadə etsək, $\varepsilon_t = e_t - x'_t \cdot a$ alarıq. ρ əmsalını onun r seçmə qiyməti və α vektorunu a vektoru ilə əvəz etsək, və bunu (15)-də yerinə qoysaq alarıq:

$$\hat{Y}_{t+1} = r \cdot y_t + (x'_{t+1} - x'_t) \cdot a. \quad (16)$$

$T+k$ anında proqnozun hesablanan qiyməti $\hat{Y}_{t+k} = x'_{t+k} \cdot a + r^k \cdot e_t$ ilə müəyyən ediləcək. Modelin səhvində yalnız heteroskedastlıq xüsusiyyəti olduqda isə bu ifadə aşağıdakı şəkllə düşəcək:

$$\sigma^2(\hat{Y}_{t+1}) = \sigma_e^2 + x'_{t+1} \cdot (X' \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot \text{COV}(\varepsilon) \cdot X \cdot (X' \cdot X)^{-1} \cdot x_{t+1} \quad (17)$$

harada ki,

$$COV(\varepsilon) = \sigma_{\varepsilon}^2 \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ & \sigma_2^2 & \dots \\ 0 & & \sigma_T^2 \end{pmatrix},$$

burada, σ_T^2 –modelin t anındaki səhvinin dispersiyasıdır.

Ədəbiyyat

1. Практикум по эконометрике: Учеб. Пособие / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Н.М. Гордеенко и др.; – М.: Финансы и статистика, 2011.
2. Эконометрика: Учебник / Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Пропект, 2011.
3. Эконометрика / Учебное пособие для проведения практических занятий / Под. ред. Т.И. Гуляевой, Е.В. Бураевой – Орел, 2014.