

NORMAL QANUNLA PAYLANMIŞ MÜDAXİLƏYƏ MALİK TƏSADÜFİ PROSESİN ERQODİK PAYLANMASININ ASİMPTOTİK DAVRANIŞININ TƏDQIQI

Rzazadə G.İ.

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

rgulare@bk.ru

Xülasə: Təqdim olunan işdə normal müdaxiləyə malik gecikməli (s, S) tipli $X(t)$ semi-Markov prosesinin riyazi quruluşu və $X(t)$ prosesinin ergodik paylanması üçün asimptotik metodla araşdırılmasının nəticəsi olaraq zəif yığılma teoremi verilmişdir.

Açar sözlər: erqodik proses, erqodik paylanma funksiyası, zəif yığılma, bərpə prosesi, normal paylanma.

$\{\xi_n\}, \{\eta_n\}, \{\theta_n\}, \{\zeta_n\}, n = 1, 2, \dots$ ardıcılıqları eyni $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ fəzasında təyin olunmuş asılı olmayan, öz aralarında eyni paylanmaya malik, müsbət qiymətli təsadüfi kəmiyyətlərdir və paylanma funksiyaları aşağıdakı kimidir:

$$\Phi(t) \equiv P\{\xi_1 \leq t\};$$

$$F(x) \equiv P\{\eta_1 \leq x\};$$

$$H(t) \equiv P\{\theta_1 \leq t\}; \quad \pi(z) \equiv P\{\zeta_1 \leq z\}, \quad t \geq 0; \quad x, z \in [s, S].$$

ζ_n təsadüfi kəmiyyətləri $[s, S]$ aralığında məhdudlaşdırılmış (a, σ^2) parametrlı normal paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir. Riyazi olaraq bu xüsusiyyəti aşağıdakı kimi verə bilərik:

$\zeta_n = \min\{S, \max(s, V_n)\}, n = 1, 2, \dots$, burada V_n -lər (a, σ^2) parametrlı normal paylanmaya malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir, yəni V_n -nin sıxlıq funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$f_{V_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

Qeyd edək ki, a parametri $[s, S]$ aralığı genişləndikcə böyüyən parametr olub, aşağıdakı kimi verilə bilər:

$$a \equiv (1 - \alpha)s + \alpha S, \alpha \in (0, 1).$$

Ancaq σ parametri $[s, S]$ aralığından asılı deyil və $\frac{\sigma}{\alpha S - s} \rightarrow 0$.

Başlanğıc təsadüfi kəmiyyətlərdən istifadə edərək aşağıdakı yeni təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı təyin edək:

$$T_n \equiv \sum_{i=1}^n \xi_i, n \geq 1; T_0 = 0;$$

$$Y_n \equiv \sum_{i=1}^n \eta_i, n \geq 1; Y_0 = 0.$$

İndidə $\{Y_n\}$ ardıcılığından istifadə edərək $N(z)$ sərhəd funksionalını verək:

$$N(z) \equiv \min\{n \geq 1: z - Y_n < s\} = \min\{n \geq 1: Y_n > z - s\} \equiv N_1(z - s).$$

Qeyd edək ki, $N(z)$ funksionalı bir bərpa prosesidir.

Bundan əlavə olaraq $\tau_1 \equiv \sum_{i=1}^{N(z)} \xi_i, \tau_0 = 0$ və $\gamma_1 = \tau_1 + \theta_1, \gamma_0 = 0$ olsun.

Digər periodlar üçün $N_r(\zeta_{r-1} - s), r = 2, 3, \dots$ funksionalını verək. Qısalıq üçün

$$L_r \equiv N_1(z - s) + N_2(\zeta_1 - s) + N_3(\zeta_2 - s) + \dots + N_r(\zeta_{r-1} - s); L_0 \equiv 0, r = 1, 2, \dots \text{ daxil edək.}$$

$$N_r(\zeta_{r-1} - s) \equiv \min\left\{n \geq 1: \zeta_{r-1} - \sum_{i=L_{r-1}+1}^{L_{r-1}+n} \eta_i < s\right\} = \min\left\{n \geq 1: \zeta_{r-1} - (Y_{L_{r-1}+n} - Y_{L_{r-1}}) < s\right\} = \min\left\{n \geq 1: Y_{L_{r-1}+n} - Y_{L_{r-1}} > \zeta_{r-1} - s\right\}$$

$$, \zeta_0 \equiv z, r = 1, 2, \dots$$

İndidə τ_r və γ_r sərhəd funksionallarını ümumi halda verək:

$$\tau_r = \gamma_{r-1} + (T_{L_r} - T_{L_{r-1}}), r = 1, 2, \dots;$$

$$\gamma_r = \tau_r + \theta_r, r = 1, 2, \dots$$

Araşdırdığımız $X(t)$ prosesini riyazi olaraq quraq. Bunun üçün əvvəlcə

$v(t) \equiv \max\{n \geq 0: T_n \leq t\}$ təsadüfi kəmiyyətini verək. İndi isə baxılan $X(t)$ prosesinin analitik şəklini verək. Hər bir $r = 1, 2, \dots$ üçün

$$\gamma_{r-1} \leq t < \gamma_r \text{ olduğundan } X(t) = \max\{s; \zeta_{r-1} - (Y_{v(t)} - Y_{L_{r-1}})\}$$

olur, burada $\gamma_0 = 0; \zeta_0 \equiv z; Y_0 = 0; Y_n = \sum_{i=1}^n \eta_i;$

$$L_{r-1} \equiv \sum_{i=1}^{r-1} N_i(\zeta_{i-1} - s); L_0 = 0, r = 2, 3, \dots$$

Bu cür təyin olunmuş $X(t)$ prosesinə normal qanunla paylanmış müdaxiləyə malik gecikməli (s, S) tipli semi-Markov prosesi deyilir. Bu proseslərə oxşar tip proseslər [1]-[4] məqalələrində tədqiq olunmuşdur.

Məqsədimiz $W_\beta(t)$ standartlaşdırılmış prosesinin $\beta \rightarrow \infty$ olduqda hansı limit paylanması yığıldığını araşdırmaqdır.

$$W_\beta(t) \equiv \frac{X(t) - s}{S - s}; X(t) \in [s, S]; W_\beta(t) \in [0, 1].$$

$W_\beta(t)$ -nin ergodik paylanma funksiyasını $Q_W(x)$ ilə göstərək, yəni

$$Q_W(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{W_\beta(t)}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{W_\beta(t) \leq x\}, x \in (0, 1).$$

Buna görə də aşağıdakı teoremi verə bilərik.

Teorem. Tutaq ki, $\{\xi_n\}\{\eta_n\}\{\theta_n\}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı aşağıdakı şərtləri ödəyir.

$$a) 0 < E(\xi_1) < \infty$$

$$b) 0 < E(\eta_1) < \infty$$

$$c) E(\theta_1) < \infty$$

Ədəbiyyat

1. Aliyev R.T., Khaniyev T.A., Gever B. Weak Convergence Theorem for Ergodic Distribution of Stochastic Processes with Discrete Interference of Chance and Generalized Reflecting Barrier // Theory Probability and its Applications, 2015, 60(3), 502–513.
2. Aliyev R.T. Ardinc O., Khaniyev T. Asymptotic approach for a renewal-reward process with a general interference of chance // Communications in Statistics - Theory and Methods, 2016, 45, pp. 4237-4248.
3. Khaniyev T.A. and Mammadova Z.I., On the stationary characteristics of the extended model of type (s, S) with Gaussian distribution of summands // Journal of Statistical Computation and Simulation, 76, 10 (2006) 861-874.
4. Aliyev R.T. Khaniyev T.A. On limit behavior of characteristic function of ergodic distribution of semi-Markovian random walk with two boundaries // Mathematical Notes, 2017, Vol. 102, No. 4, pp. 444–454.