

PARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN ƏMSALIN TAPILMASI HAQQINDA TƏRS MƏSƏLƏNİN VARIASIONAL QOYULUŞU

Səfərova G.Ş.

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

gunew.seferova96@mail.ru

Xülasə: Təqdim olunan işdə parabolik tənlikdə həllin qarşısındakı əmsalın tapılması haq-qında tərs məsələnin variasional qoyuluşunun korrektiliyi tədqiq olunmuş, məqsəd funksionalının qradienti üçün ifadə tapılmış və optimallıq üçün zəruri şərt göstərilmişdir.

Açar sözlər: parabolik tənlik, tərs məsələ, optimallıq şərti.

Tutaq ki ,

$$J(v) = \int_0^l \left| \frac{1}{T} \int_0^T u(x, t; v) dt - \chi(x) \right|^2 dx \quad (1)$$

funksionalını aşağıdakı şərtlər ödənilməklə minimallaşdırmaq tələb olunur :

$$u_t - (k(x, t) u_x)_x + v(x) u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (4)$$

$$v \in V = \{v = v(x) \in L_2(0, l) : |v(x)| \leq d, (0, l) \text{ s.h.y.}\}. \quad (5)$$

Burada $v = v(x)$ - idarəedicisi, $u = u(x, t) = u(x, t; v)$ - (2)-(4) sərhəd məsələsinin $v = v(x)$ idarəedicisinə uyğun həlli, $d > 0$ verilmiş ədəd, $k(x, t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\chi(x)$ aşağıdakı şərtləri ödəyən verilmiş funksiyalardır:

$0 < v \leq k(x, t) \leq \mu$, $|k_t(x, t)| \leq \mu_1$ Q-də sanki hər yerdə ,

$$\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l), f \in L_2(Q), \chi \in L_2(0, l) \quad (6)$$

Hər bir qeyd olunmuş $v \in V$ üçün (2)-(4) sərhəd məsələsinin həlli $W_2^{1,0}(Q)$ fəzasından olan ümumiləşmiş həll kimi təyin olunur[1].

Teorem 1. Tutaq ki , (6) şərtləri ödənilir. Onda (1)-(5) məsələsinin optimal idarəedicilər çoxluğu

$$V_* = \{v_* \in V : J(v_*) = J_* = \inf \{J(v) : v \in V\}\}$$

boş deyil və (1) funksionalı üçün ixtiyarı minimallaşdırıcı ardıcılıq $L_2(0, l)$ -də V_* çoxluğuna zəif yığılır.

Tutaq ki , (1) funksionalını (2)-(4) şərtləri ödənilməklə

$$V = \{v = v(x) \in L_s(0, l) : |v(x)| \leq d, (0, l) \text{ s.h.y.}\}$$

(5') çoxluğunda minimallaşdırmaq tələb olunur, burada $s > 2$ - verilmiş ədəddir. Bu məsələni (1)-(4), (5') məsələsi adlandıraraq.

Teorem 2. Tutaq ki , (6) şərtləri ödənilir. Onda (1)-(4), (5') məsələsində (1) məqsəd funksionalı $L_s(0, l)$ -in normasına görə V çoxluğunda Freşe mənada kəsilməz diferensiallandıdır və onun qradienti

$$J'(v) = \int_0^T u(x, t; v) \psi(x, t; v) dt, \quad 0 < x < l$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\psi(x, t; v)$ -(1)-(4), (5') məsələsinə uyğun qoşma məsələnin həllidir [2].

Teorem 3. Tutaq ki , (6) şərtləri ödənmir. Onda (1)-(4) ,(5') məsələsində $v_* = v_*(x) \in V$ idarəedicisinin optimallığı üçün

$$\int_0^l \left[\int_0^T u(x, t; v_*) \psi(x, t; v_*) dt \right] [v(x) - v_*(x)] dx \geq 0, \quad \forall v = v(x) \in V$$

bərabərsizliyinin ödənilməsi zəruridir.

Ədəbiyyat

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.:Наука,1973,407 с.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука,1981, 400 с.

$$k(x), q(x) \in L_\infty(0, l), \quad z = z(x) \in L_2(\Omega), \quad 0 < \nu_1 \leq k(x) \leq \mu_1, \quad 0 \leq \nu_2 \leq q(x) \leq \mu_2, \\ \nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2 = \text{const}, \quad \left| \frac{dk}{dx} \right| \leq \mu_3, \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Hər bir qeyd olunmuş $v = v(x) \in L_2(\Omega)$ idarəedicisi üçün (2)-(3) məsələsinin həllini $W_2^1(\Omega)$ -dan olan ümumiləşmiş həll kimi təyin edək[1].

Teorem 1. Tutaq ki, (1)-(4) məsələsinin verilənləri (5) şərtlərini ödəyir. Onda (1) funksionalı (2)-(3) şərtləri daxilində $L_2(\Omega)$ fəzasında zəif ya-rımkəsilməzdir. Bundan başqa, (1) – (4) məsələsinin

$$V_* = \{v_* \in V: J(v_*) = \inf J(v), v \in V\}$$

minimum nöqtələr çoxluğu boş deyildir və ixtiyari minimallaşdırıcı $\{v_k\}$ ardıcılığı V_* çoxluğuna $L_2(\Omega)$ -da zəif yığılır.

(1)-(5) məsələsinin fərqlər aproksimasiyasını qurmaq üçün $\Omega = (0; 1)$ -də aşağıdakı şəbəkələri daxil edək:

$$\omega = \{x \in \Omega: x = x_i = ih, i = 1, N-1, h = 1/N\}, \quad \bar{\omega} = \{x_0 = 0\} \cup \omega \cup \{x_N = 1\}.$$

(1)-(4) məsələsinə aşağıdakı şəbəkə optimal idarəetmə məsələlər ailəsinə qarşı qoyar: tutaq ki,

$$J_h(v_h) = \sum_{x \in \omega} |y(x; v_h) - z_h(x)|^2 \quad (6)$$

funksionalını

$$-\left(k^{(-0,5)}(x)y_{\bar{x}}\right)_x + q_h(x)y = v_h(x), \quad x \in \omega, \quad (7)$$

$$y(0; v_h) = y(1; v_h) = 0, \quad (8)$$

şəbəkə sərhəd məsələsinin

$$v_h = v_h(x) \in V = \{v_h = v_h(x) \in L_2(\Omega): \|v_h\|_{2,\omega} \leq r\}. \quad (9)$$

şəbəkə idarəedicilərinə uyğun $y = y(x) = y(x; v_h)$ həlləri çoxluğunda minimallaşdırmaq tələb olunur. Burada $k^{(-0,5)}(x) = k(x - 0,5h)$, $y = y(x)$,

$$S(q) = \frac{1}{h} \int_{x-0,5h}^{x+0,5h} q(\xi) d\xi, \quad S(f) = \frac{1}{h} \int_{x-0,5h}^{x+0,5h} f(\xi) d\xi.$$

Teorem 2. Tutaq ki, (5) şərtləri ödəyir. Onda (2)-(3) fərqlər sxemi $W_2^1(\omega)$ şəbəkə normasında $O(h)$ sürəti ilə yığılır və

$$\|y - u\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq Mh \|u\|_{2,\Omega}^{(2)}$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Burada $M > 0$ sabiti h və $u(x)$ -dən asılı deyil-dir.

Tutaq ki, hər bir $h > 0$ üçün $\bar{\omega}$ şəbəkəsində hər-hansı minimallaşdırma üsulunun köməyi ilə $J_h(v_h)$ funksionalının $J_{h_*} = \inf \{J_h(v_h): v_h \in V_h\}$ aşağı sərhədlərinin $J_{h_*} + \varepsilon_h$ təqribi qiymətləri və elə $v_{h\varepsilon} \in V_h$ şəbəkə idarə-ediciləri tapılmışdır ki,

$$J_{h_*} \leq J_h(v_{h\varepsilon}) \leq J_{h_*} + \varepsilon_h, \quad v_{h\varepsilon} \in V_h \quad (10)$$

şərtləri ödənilir, burada $\varepsilon_h \geq 0$ və $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_h = 0$ [2].

Teorem 3. Tutaq ki, (5) və (10) şərtləri ödənilir. Onda (6)-(9) şəbəkə idarəetmə məsələlər ailəsi (1)-(4) məsələsini funksionala görə aproksimasiya edir və aşağıdakı yığılma sürəti qiymətləndirməsi doğrudur:

$$\left| J_{h_*} - J_* \right| \leq M h.$$

Ədəbiyyat

1. О.А. Ладыженская Краевые задачи математической физики.-М.: Наука, 1973, 407 с.
2. Ф.П. Васильев Методы решения экстремальных задач.-М.: Наука, 1981,400с.