

# İKİNCİ TƏRTİB ADI DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN FƏRQLƏR APROKSİMASİYASI

**Səfərova R.A.**

(BDU , Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi )

[r.seferova96@mail.ru](mailto:r.seferova96@mail.ru)

**Xülasə:** İkinci tərtib xətti adi diferensial tənlik üçün optimal idarəetmə məsələsinin qoyuluşunun korrektiliyi tədqiq olunmuş, məsələnin fərqlər aproksimasiyası qurulmuş və onun funksionala görə yığılma sürəti üçün qiymətləndirmə alınmışdır.

**Açar sözlər:** optimal idarəetmə, fərqlər aproksimasiyası.

Aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə baxaq: tutaq ki,

$$J(v) = \int_0^1 |u(x; v) - z(x)|^2 dx \quad (1)$$

funksionalını

$$-\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = v(x), \quad x \in \Omega \equiv (0; 1) \quad (2)$$

$$u(0; v) = u(1; v) = 0, \quad (3)$$

sərhəd məsələsinin

$$v = v(x) \in V = \{v = v(x) \in L_2(\Omega) : \|v\|_{2,\Omega} \leq r\}. \quad (4)$$

mümkün idarəedicilərinə uyğun  $v = v(x)$  həlləri çoxluğunda minimallaşdırmaq tələb olunur. Burada  $r > 0$  verilmiş ədəd,  $k(x), q(x), z(x)$ -aşağıdakı şərtləri ödəyən verilmiş funksiyalardır:

$$k(x), q(x) \in L_\infty(0, l), \quad z = z(x) \in L_2(\Omega), \quad 0 < \nu_1 \leq k(x) \leq \mu_1, \quad 0 \leq \nu_2 \leq q(x) \leq \mu_2, \\ \nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2 = \text{const}, \quad \left| \frac{dk}{dx} \right| \leq \mu_3, \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Hər bir qeyd olunmuş  $v = v(x) \in L_2(\Omega)$  idarəedicisi üçün (2)-(3) məsələsinin həllini  $W_2^1(\Omega)$ -dan olan ümumiləşmiş həll kimi təyin edək[1].

**Teorem 1.** Tutaq ki, (1)-(4) məsələsinin verilənləri (5) şərtlərini ödəyir. Onda (1) funksionalı (2)-(3) şərtləri daxilində  $L_2(\Omega)$  fəzasında zəif ya-rımkəsilməzdir. Bundan başqa, (1) – (4) məsələsinin

$$V_* = \{v_* \in V: J(v_*) = \inf J(v), v \in V\}$$

minimum nöqtələr çoxluğu boş deyildir və ixtiyari minimallaşdırıcı  $\{v_k\}$  ardıcılığı  $V_*$  çoxluğuna  $L_2(\Omega)$ -da zəif yığılır.

(1)-(5) məsələsinin fərqlər aproksimasiyasını qurmaq üçün  $\Omega = (0; 1)$ -də aşağıdakı şəbəkələri daxil edək:

$$\omega = \{x \in \Omega: x = x_i = ih, i = 1, N-1, h = 1/N\}, \quad \bar{\omega} = \{x_0 = 0\} \cup \omega \cup \{x_N = 1\}.$$

(1)-(4) məsələsinə aşağıdakı şəbəkə optimal idarəetmə məsələlər ailəsinə qarşı qoyar: tutaq ki,

$$J_h(v_h) = \sum_{x \in \omega} |y(x; v_h) - z_h(x)|^2 \quad (6)$$

funksionalını

$$-\left(k^{(-0,5)}(x)y_{\bar{x}}\right)_x + q_h(x)y = v_h(x), \quad x \in \omega, \quad (7)$$

$$y(0; v_h) = y(1; v_h) = 0, \quad (8)$$

şəbəkə sərhəd məsələsinin

$$v_h = v_h(x) \in V = \{v_h = v_h(x) \in L_2(\Omega): \|v_h\|_{2,\omega} \leq r\}. \quad (9)$$

şəbəkə idarəedicilərinə uyğun  $y = y(x) = y(x; v_h)$  həlləri çoxluğunda minimallaşdırmaq tələb olunur. Burada  $k^{(-0,5)}(x) = k(x - 0,5h)$ ,  $y = y(x)$ ,

$$S(q) = \frac{1}{h} \int_{x-0,5h}^{x+0,5h} q(\xi) d\xi, \quad S(f) = \frac{1}{h} \int_{x-0,5h}^{x+0,5h} f(\xi) d\xi.$$

**Teorem 2.** Tutaq ki, (5) şərtləri ödənilir. Onda (2)-(3) fərqlər sxemi  $W_2^1(\omega)$  şəbəkə normasında  $O(h)$  sürəti ilə yığılır və

$$\|y - u\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq Mh \|u\|_{2,\Omega}^{(2)}$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Burada  $M > 0$  sabiti  $h$  və  $u(x)$ -dən asılı deyil-dir.

Tutaq ki, hər bir  $h > 0$  üçün  $\bar{\omega}$  şəbəkəsində hər-hansı minimallaşdırma üsulunun köməyi ilə  $J_h(v_h)$  funksionalının  $J_{h_*} = \inf \{J_h(v_h): v_h \in V_h\}$  aşağı sərhədlərinin  $J_{h_*} + \varepsilon_h$  təqribi qiymətləri və elə  $v_{h\varepsilon} \in V_h$  şəbəkə idarə-ediciləri tapılmışdır ki,

$$J_{h_*} \leq J_h(v_{h\varepsilon}) \leq J_{h_*} + \varepsilon_h, \quad v_{h\varepsilon} \in V_h \quad (10)$$

şərtləri ödənilir, burada  $\varepsilon_h \geq 0$  və  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_h = 0$  [2].

**Teorem 3.** Tutaq ki, (5) və (10) şərtləri ödənilir. Onda (6)-(9) şəbəkə idarəetmə məsələlər ailəsi (1)-(4) məsələsini funksionala görə aproksimasiya edir və aşağıdakı yığılma sürəti qiymətləndirməsi doğrudur:

$$\left| J_{h_*} - J_* \right| \leq M h.$$

### Ədəbiyyat

1. О.А. Ладыженская Краевые задачи математической физики.-М.: Наука, 1973, 407 с.
2. Ф.П. Васильев Методы решения экстремальных задач.-М.: Наука, 1981,400с.