

XƏTTİ ELLİPTİK TƏNLİK ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN FƏRQLƏR APROKSİMASİYASI

Səfərova R. A.

(BDU , Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

r.seferova96@mail.ru

Xülasə: İkinci tərtib xətti elliptik tənlik üçün optimal idarəetmə məsələsinin həll-inin varlığı isbat olunmuş və onun fərqlər aproksimasiyasının yığılma sürəti üçün qiymət-ləndirmə alınmışdır.

Açar sözlər: elliptik tənlik, optimal idarəetmə.

Tutaq ki, idarəolunan proses
 $\Omega = \{ x = (x_1; x_2) : 0 < x_i < 1 (i = 1, 2) \}$ vahid kvadratında xətti elliptik tənlik üçün aşağıdakı sərhəd məsələsi ilə izah olunur :

$$-\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + v(x) u = f(x), x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) = 0, x \in \Gamma. \quad (2)$$

burada Γ - Ω kvadratının sərhəddi, $k_1(x), k_2(x), f(x)$ - verilmiş funksiya-lar, $v(x)$ - idarəedicilərin funksiyası və ya idarəedicilərin, $u = u(x) = u(x; v)$ - prosesin vəziyyəti və ya (1), (2) məsələsinin $v(x)$ idarəedicisinə uyğun həllidir.

Mümkün idarəedicilər çoxluğunu daxil edək :

$$V = \{ v = v(x) \in L_2(\Omega) : 0 < q_0 \leq v(x) \leq q_1 \text{ } \Omega \text{-da s.h.y.} \} \quad (3)$$

burada $q_1 > q_0 > 0$ - verilmiş ədədlərdir.

Tutaq ki,

$$J(v) = \int_{\Omega} |u(x; v) - w(x)|^2 dx \quad (4)$$

funksionalını (1) , (2) şərtləri ödənilməklə V çoxluğunda minimallaşdırmaq tələb olunur , burada $w(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ -verilmiş funksiyadır. Bu məsələni (1)-(4) məsələsi adlandıracağıq.

Fərz edəcəyik ki, verilmiş funksiyalar aşağıdakı şərtləri ödəyir :

$$0 < v_i \leq k_i(x) \leq \mu_i , \quad \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right| \leq \gamma_j^{(i)} \quad (i = 1, 2) \quad \Omega\text{-da sanki hər yerdə ;}$$

$$f(x) \in L_2(\Omega) , \quad w(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) . \quad (5)$$

Burada $\mu_i \geq v_i > 0$, $\gamma_j^{(i)} > 0$ ($i = 1, 2$)-verilmiş ədədlərdir.

(1) , (2) sərhəd məsələsinin $v = v(x) \in V$ idarəedicisinə uyğun həlli $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ fəzasından olan ümumiləşmiş həll kimi təyin olunur [1]. Bu həll $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ sinfinə daxildir və ixtiyari $\eta = \eta(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ üçün aşağıdakı integral eyniliyi ödəyir :

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 k_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + v u \eta \right) dx = \int_{\Omega} f \eta dx \quad (6)$$

(1) - (4) məsələsinin həllər çoxluğunu, yəni optimal idarəedicilər çox-luğunu V_* ilə işarə edək :

$$V_* = \{ v_* \in V : J(v_*) = \{ \inf J(v) , v \in V \} \}.$$

Teorem 1. Tutaq ki, (5) şərtləri ödənilir. Onda (1) - (4) məsələsinin optimal idarəedicilər çoxluğu boş deyildir.

(1)-(4) məsələsini aşağıdakı optimal idarəetmə məsələləri ilə aprok-simasiya edək: tutaq ki,

$$J_h(v_h) = \sum_{x \in \omega} \left| y(x; x_h) - w_h(x) \right|^2 h_1 h_2 \quad (7)$$

funksionalını

$$-\left(k_1^{(-0.5)}(x)y_{x_1}\right)_{x_1} - \left(k_2^{(-0.5)}(x)y_{x_2}\right)_{x_2} + v_h(x)y = f_h(x) , \quad x \in \omega , \quad (8)$$

$$y(x) = 0 , \quad x \in \gamma , \quad (9)$$

$$v_h = v_h(x) \in V_h = \left\{ v_h = v_h(x) \in L_2(\omega) : 0 < q_0 \leq v_h(x) \leq q_1 , x \in \omega \right\}. \quad (10)$$

şərtləri daxilində minimallaşdırmaq tələb olunur. Burada

$$w_h(x) = S(w) = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_1-0.5h_1}^{x_1+0.5h_1} \int_{x_2-0.5h_2}^{x_2+0.5h_2} w(\xi) d\xi , \quad x \in \omega ,$$

$$f_h(x) = S(f) = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_1-0.5h_1}^{x_1+0.5h_1} \int_{x_2-0.5h_2}^{x_2+0.5h_2} f(\xi) d\xi , \quad x \in \omega ,$$

$$k_1^{(-0.5)}(x) = k_1(x_1 - 0.5h_1, x_2) , \quad k_2^{(-0.5)}(x) = k_2(x_1, x_2 - 0.5h_2) ,$$

$$\omega_1 = \left\{ x_1 : x_1 = x_{1j_2} = j_1 h_1 , j_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1 \right\} ,$$

$$\omega_2 = \left\{ x_2 : x_2 = x_{2j_2} = j_2 h_2 , j_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1 \right\} , \quad \omega = \omega_1 \times \omega_2 .$$

Teorem 2. Tutaq ki, teoreml-in şərtləri ödənilir. Onda ixtiyari $v \in V$ $v_h \in V_h$ üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\left| J(v) - J_h(v) \right| \leq M \left[|h| + \|S(v) - v_h(x)\|_{2,\omega} \right],$$

burada $M > 0$ -müəyyən sabitdir.

Teorem 3. Tutaq ki, teoreml-in şərtləri ödənilir. Onda (7)-(10) məsələlər ardıcılığı (1)-(5) məsələsini funksionala görə aproksimasiya edir və yığılma sürəti üçün

$$\left| J_{h*} - J_* \right| \leq M |h|$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Ədəbiyyat

1. А.А.Самарский , Р.Д. Лазаров , В. Макаров , Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями.-М.: Высш.шк., 1987, 296с.

2. Ф.П.Васильев Методы решения экстремальных задач .- М.:Наука, 1981,400с.