

*Səbzəliyev Mahir Mirzəxan oğlu,  
riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor,  
Email: sabzaliev@mail.ru  
Bəyəliyev Ramiz Məmmədcəfər oğlu,  
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent,  
Bakı Biznes Universiteti*

## **KOMPLEKS ƏDƏD ANLAYIŞININ DAXİL EDİLMƏSİNƏ DAİR BƏZİ MÜLAHİZƏLƏR**

Orta məktəbin X sinfində şagirdlər kompleks ədəd anlayışı ilə tanış edirlər. Kompleks ədədə belə tərif verilir: “Kvadrat -1-ə bərabər olan ədəd,  $i$ -ilə işarə edək  $x$  və  $y$  istənilən həqiqi ədədlər olduqda  $x+iy$  şəklindəki ədədlərə kompleks ədədlər deyilir”. Kompleks ədədlərə bu tərif verilənə qədər şagirdlərə həmişə öyrədilir ki, istənilən ədədin kvadratı mənfi deyil. Yalnız sıfırın kvadratı sıfıra bərabərdir. İstər mənfi, istərsə də müsbət ədədlərin kvadratları müsbət ədədlərdir. Lakin kompleks ədədlərə tərif verilərkən deyilir ki, kvadratı-1-ə bərabər olan ədəd “ $i$ ” ilə işarə edək. Bu necə başa düşülə bilər? Çox təəssüflə qeyd edilməlidir ki, ali məktəblər Azər-baycan dilində

olan dərsliklərin və dərs vəsaitlərinin də demək olar ki, hamısında kompleks ədədlərə belə tərif verilmişdir. Ali məktəblərdə riyazi fənləri tədris edən müəllimlərin də çoxu bu tərifdən istifadə edirlər. Əslində isə kompleks ədədlərə aşağıdakı kimi tərif verilmişdir.

$x$  və  $y$  hər ikisi həqiqi ədədlər olduqda  $(x, y)$  şəkilli bütün cütlər çoxluğuna baxaq. Hər bir belə cütü bir hərfə, məsələn,  $z = (x, y)$  ilə işarə edək. İki  $z_1 = (x_1, y_1)$  və  $z_2 = (x_2, y_2)$  cütləri o zaman bərabər hesab olunurlar ki,  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$  olsun. Bütün belə cütlər çoxluğuna iki cütün cəmi və hasil əməllərini aşağıdakı qayda ilə təyin edək:

$$1. z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

$$2. z_1 z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Toplama və vurma əməlləri belə təyin edildikdə  $(x, y)$  şəkildə olan bütün cütlər çoxluğuna kompleks ədədlər çoxluğu, hər bir  $z = (x, y)$  cütünə isə kompleks ədəd deyilir.

Şərtləşək ki,  $(x, 0)$  şəkildə olan kompleks ədədləri  $(x, 0) = x$  kimi yazacağıq.  $(0, 1)$  kompleks ədədi kompleks ədədlər çoxluğuna xüsusi rol oynadığına görə onun üçün xüsusi işarə qəbul edilmişdi  $(0, 1) = i$ .

Göstərmək olar ki, yuxarıda qəbul edilən vurma qaydasına görə  $i^2 = -1$  olur.

Doğrudan da,

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1 \cdot 0) = -1.$$

$i$ -əy xəyal vahid deyilir. Göstərmək olar ki, hər bir  $z = (x, y)$  kompleks ədədini  $z = x + iy$  şəkildə yazmaq olar. Bunun üçün əvvəlcə qeyd edək ki,  $(0, y) = (y, 0) \cdot (0, 1)$  bərabərliyi doğrudur. Doğrudan da, kompleks ədədlərin vurulma qaydasına əsasən yazı bilərik:

$$(y, 0) \cdot (0, 1) = (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, y).$$

Bu bərabərlikdən və kompleks ədədlərin toplama qaydasından istifadə edərək alırıq:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + yi.$$

Kompleks ədədin  $z = x + iy$  şəkildə yazılışına onun cəbri şəkli,  $z = (x, y)$  yazılışına isə onun cüt şəkildə yazılışı deyilir.  $x$ -ə  $z$  kompleks ədədinin həqiqi hissəsi deyilir və  $\operatorname{Re} z = x$  kimi işarə olunur. Bu işarə həqiqi mənasını verən “realis” latın sözündən götürülmüşdür.  $y$ -ə kompleks ədədin xəyali hissəsi deyilir və  $\operatorname{Im} z = y$  kimi işarə olunur. Bu işarə xəyali mənasını verən “imaqinarius” latın sözündən götürülmüşdür.

$(x, -y) = x - iy$  ədədinə  $z = (x, y) = x + iy$  kompleks ədədinə qoşma kompleks ədəd deyilir və  $\bar{z} = x - iy$  kimi işarə olunur.

Qeyd edək ki,  $i^2 = -1$  olmasından alınır ki,  $i$ -nin istənilən tam üstlü qüvvəti -

1,1i,-i ədədlərindən birini verir. Məsələn,

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i, i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \text{ və s.}$$

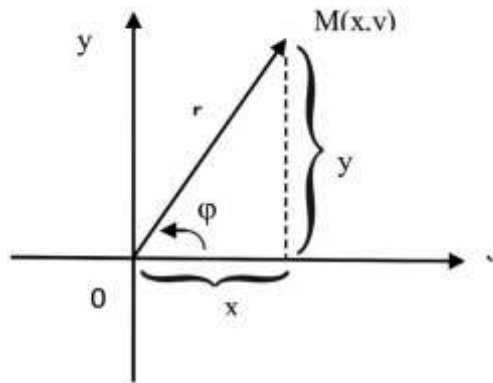
Kompleks ədədlərin cəbri şəklinə əsasən yuxarıda verilən vurma qaydası belə alınır:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

Cəbri şəkildə verilmiş  $z_1 = x_1 + iy_1$  kompleks ədədinin  $z_2 = x_2 + iy_2$  kompleks nisbətini belə tapma olar:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 - i^2y_1y_2}{x_2^2 - (iy_2)^2} = \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - i(x_1y_2 - x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}i. \end{aligned}$$

Qeyd edək ki, bərabər olmayan iki kompleks ədədləri müqayisə etmək olmaz. Hər bir  $z = (x, y)$  kompleks ədədi koordinat müstəvisi üzərində  $(x, y)$  koordinatı bir  $M(x, y)$  nöqtəsi ilə və ya  $\overline{OM}$  vektoru ilə təsvir oluna bilər.



$\overline{OM}$  vektorunun uzunluğuna  $z = x + iy$  kompleks ədədinin modulu deyilir və  $\text{mod } z$  və ya  $|z|$  kimi işarə olunur. Şəkildən aydındır ki,  $z = x + iy$  kompleks ədədinin modulu

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

düsturu ilə təyin edilir.  $\overline{OM}$  vektorunun  $OX$  oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucağı  $\varphi$  ilə işarə edək. Şəkildən aydındır ki,

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1)$$

düsturları doğrudurlar. Bu düsturlardan təyin olunan  $\varphi$ -yə  $z = x + iy$  kompleks ədədinin argumenti deyilir və  $\varphi = \text{arg } z$  kimi işarə olunur. Aydındır ki,  $\varphi$  üçün (1) bərabərliklərini ödəyən sonsuz sayda qiymətlər vardır. Çox vaxt bu qiymətlərdən

$-\pi < \varphi \leq \pi$  şərtini ödəyənini götürürlər. Qeyd edək ki,  $\varphi$ -ni  $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$  bərabərliyindən də təyin etmək olar.

(1) düsturlarından  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  tapıb,  $x$  və  $y$ -in bu ifadələrini  $z = x + iy$  düsturunda yerlərinə yazsaq,

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2)$$

alırıq. (2)-yə  $z$  kompleks ədədinin triqonometrik şəkli deyilir.

Kompleks ədədlərin təsvir olunduğu koordinat müstəvisinə kompleks müstəvi,  $OX$  oxuna həqiqi ox,  $OY$  oxuna xəyali ox deyilir.

Qeyd edək ki, xəyali hissəsi sıfır bərabər olan kompleks ədədlər həqiqi ədədlərdir. Həqiqi hissəsi sıfır bərabər olan kompleks ədədlərə sıfır xəyali ədədlər deyilir, onlar  $0 + yi = yi$  şəklində olurlar. Müsbət həqiqi ədədlərin modulları özlərinə bərabərdir, argumentləri isə sıfırdır. Ona görə istənilən müsbət  $a$  ədədini triqonometrik şəkil-də  $a = a(\cos 0 + i \sin 0)$  kimi yazırlar. Mənfi  $a < 0$  həqiqi ədədinin modulu  $|a|$ -ya, argumenti  $\pi$ -yə bərabərdir. Ona görə ixtiyari  $a < 0$  həqiqi ədədi triqonometrik şəkildə  $a = |a|(\cos \pi + i \sin \pi)$  kimi yazırlar.  $b > 0$  olduqda  $bi$  sıfır xəyali ədədinin modulu  $b$ -yə, argumenti  $\frac{\pi}{2}$ -yə bərabərdir və triqonometrik şəkildə

$bi = b\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$  kimi yazılır.  $b < 0$  olduqda  $bi$  ədədinin modulu  $|b|$ -yə, argumenti  $-\frac{\pi}{2}$ -yə bərabərdir və triqonometrik şəkildə  $bi = |b|\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$  kimi yazılır.

İsbatsız olaraq qeyd edək ki, triqonometrik şəkildə verilmiş iki  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  kompleks ədədlərinin hasili

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

qisməti isə

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

düsturları ilə təyin edilirlər.

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  kompleks ədədinin  $n$ -ci dərəcədən qüvvəti üçün

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

$n$ -ci dərəcədən kökü üçün isə

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

düsturları doğrudurlar. Kökalma düsturunda  $k$ -ya sonsuz sayda  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  qiymətlərini vermək olar. Lakin bu zaman yalnız  $n$  sayda müxtəlif kompleks ədədlər alınır. Ona görə də  $k$ -ya  $0, 1, 2, \dots, n-1$  qiymətlərini vermək kifayətdir.