

*Əliyev Əkbər Bayram oğlu, professor,
AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu,
Azərbaycan Neft və Sənaye Universiteti,
İsmailzadə Zəhra,
AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu*

DƏYİŞƏN ARTIM TƏRTİBƏ VƏ LOQARİFMİK QEYRİ-XƏTTİLİYƏ MALİK HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN QARIŞIQ MƏSƏLƏ

Son dövrlərdə yeni texnologiyaların inkişafı ilə əlaqədar olaraq, qeyri standart tənliklərin araşdırılması zərurəti yaranmışdır. Xüsusi törəməli dəyişən dərəcəli artım tərtibinə malik hiperbolik tənliklər üçün başlanğıc sərhəd məsələləri həm nəzəri, həm də praktik əhəmiyyətinə görə böyük maraq kəsb edir [1-6]. Təqdim olunan işdə dəyişən artım tərtibinə və loqarifmik qeyri-xəttiliyə malik bir sinif yarım xətti hiperbolik tənlik üçün qarışıq məsələ araşdırılır.

Məsələnin qoyuluşu.

Tutaq ki, $\Omega \subset R^n$ kifayət qədər hamar Γ sərhədinə malik məhdud oblastdır. $R_+ \times \Omega$ oblastında aşağıdakı qarışıq məsələyə baxaq:

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = u|u|^{p(x)-2} \ln|u|^{k(x)}, \quad (1)$$

$$u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

Burada $R_+ = [0, +\infty)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ - Laplas operatoru,

- $u()$ $R_+ \times \Omega$ -da təyin edilmiş həqiqi qiymətli funksiyadır. $p(x)$ və $k(x)$ funksiyaları aşağıdakı şərtləri ödəyir:

- $p(\cdot)$ funksiyası loqarifmik Hölder şərtini ödəyir, yəni elə $A > 0$ ədədi var ki, istənilən

$$\begin{aligned} x, y \in \Omega \quad \text{üçün} \quad |x - y| < \delta, \quad 0 < \delta < 1 \\ |p(x) - p(y)| \leq -A \log|x - y| \end{aligned} \quad (4)$$

bərabərsizliyi ödənilir və elə p_1, p_2 sabitləri var ki,

$$n = 1, 2 \quad \text{halında} \quad 2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2, \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$n \geq 3 \quad \text{halında} \quad 2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \frac{2(n-1)}{n-2}, \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

$$- k(x) > 0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad \text{-da təyin olunub və kəsilməz funksiyadır.} \quad (7)$$

Dəyişən $p(\cdot)$ dərəcədən Lebeq mənada inteqrallanan funksiyalar çoxluğunu $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ ilə işarə edək:

$$L_{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ v(\cdot): \Omega \rightarrow R, \quad \int_{\Omega} |v(x)|^{p(x)} dx < +\infty. \right\}.$$

$L_{p(\cdot)}(\Omega)$ fəzasında aşağıdakı qayda ilə norma təyin edilir

$$\|v\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0; \quad \int_{\Omega} \left| \frac{v(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Məlumdur ki, bu şərt daxilində $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ Banax fəzasıdır.

Dəyişən dərəcəli $W_{p(\cdot)}^1(\Omega)$ Sobolev fəzası aşağıdakı şəkildə təyin olunur:

$$W_{p(\cdot)}^1(\Omega) = \{v: v, v_x \in L_{p(\cdot)}(\Omega)\}, \|v\|_{W_{p(\cdot)}^1(\Omega)} = \|v\|_{L_{p(\cdot)}(0,l)} + \|v_x\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}$$

$\dot{W}_2^1(\Omega)$ ilə $W_2^1(\Omega)$ -nin aşağıdakı alt fəzasının işarə edək:

$$\dot{W}_2^1(\Omega) = \{u: u \in W_2^1(\Omega), u(x) = 0, x \in \Gamma\}.$$

Aşağıdakı çoxluğu daxil edək:

$$H_{T,\infty}^1 = \{u(\cdot): u(\cdot) \in L_\infty(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega)), u_t(\cdot) \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega))\}$$

Tərif. (1)-(3) məsələsinin $[0, T] \times \Omega$ oblastında zəif həlli dedikdə, elə $u(\cdot) \in H_{T,\infty}^1$ funksiyalar cütü başa düşülür ki, istənilən $\eta(\varphi) \in H_{T,\infty}^1$, $\eta(T, x) = 0$ üçün

$$\begin{aligned} & \int_0^T [-\langle u_t(t, \cdot), \eta_t(t, \cdot) \rangle + \langle \nabla u(t, \cdot), \nabla \eta(t, \cdot) \rangle] dt + \int_0^T \langle u_t(t, \cdot), \eta(t, \cdot) \rangle dt = \\ & = \int_0^T \langle |u(t, \cdot)|^{p(x)} \ln |u(t, \cdot)|^{k(x)}, \eta(t, \cdot) \rangle dt, \\ & \lim_{t \rightarrow 0} \langle u(t, \cdot) - \varphi(\cdot), \eta(t, \cdot) \rangle_{\dot{W}_2^1(\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

Burada, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\dot{W}_2^1(\Omega)}$ $\dot{W}_2^1(\Omega)$ ilə ona ikili fəza arasındakı təsirdir.

Tutaq ki, (4),-(7) şərtləri ödənilir. Onda istənilən $\varphi(\cdot) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, başlanğıc verilənləri üçün elə $T' > 0$ var ki, (1)-(3) məsələsinin yeganə $u(\cdot) \in H_{T',\infty}^1$ həlli var. Belə ki,

$T_{\max} = \max T'$ həmin həllin varlığı üçün maksimal intervalın uzunluğudursa, onda aşağıdakılardan biri ödənilir:

- 1) $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \sum_{i=1}^2 [\|u_t(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla u(t, \cdot)\|^2] = +\infty$;
- 2) $T_{\max} = +\infty$.

İstifadə olunmuş ədəbiyyat:

1. Ruzicka M. Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1748, 2000, 178 p., MR1810360.
2. Zhikov V.V. Questions of convergence duality and averaging for functionals of the calculus of variations, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 47(5), 1983, 961–995; English transl. Math.USSR-Izv. 23(2), 1984, 243–276, MR718413.
3. Antontsev S. Wave equation with $p(x,t)$ -Laplacian and damping term: blow-up of solutions, C.R. Mecanique, 339(12), 2011, 751-755.
4. Messaoudi S.A., Talahmeh A.A. A blow-up result for a nonlinear wave equation with variable-exponent nonlinearities, Math. Meth. Appl. Sci., 96, 2017, 1509-1515.
5. Kafini M., Messaoudi S., Local existence and blow up of solutions to logarithmic nonlinear wave equation with delay, Applicable Analysis.
<https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1504029>
6. Алиев А.Б., Шафиева Г.Х., Разрушение решений смешанной задачи для систем волновых уравнений с граничной диссипацией и внутренним нелинейным фокусирующим источником переменного порядка роста, Дифференциальные уравнения, 57(3), 2021, 313 – 325.