

SİNGULAR HƏYƏCANLANMIŞ İXTİYARİ TƏK TƏRTİBLİ DİFERENSIAL TƏNLİK ÜÇÜN QOYULMUŞ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN ASİMPTOTİKASI

Bir fiziki xarakteristikasından digərlərinə keçidi hamar olmayan proseslər yüksək tərtibli törəmələri qarşısında kiçik parametrlər olan diferensial tənliklərə gətirilir. Belə diferensial tənliklərə singular həyəcanlanmış diferensial tənliklər deyilir. Singular həyəcanlanmış diferensial tənliklər üçün qoyulmuş sərhəd məsələlərinin həllərinin kiçik parametrdən asılılıqlarının öyrənilməsi həm nəzəri, həm də tətbiqi nöqtəyindən çox əhəmiyyətlidir. Belə sərhəd məsələləri A.N.Tixonov, L.S.Pontryagin, N.N.Boqolyubov, Y.A.Mitropolski, V.Vazov, M.İ.Vişik, L.A.Lyüsternik, A.M.İlin və başqa görkəmli alimlərin diqqətini cəlb etmişdir. Hazırda singular həyəcanlanmış diferensial tənlikləri tədqiq etmək üçün bir neçə asimptotik metodlar mövcuddur. Bu asimptotik metodlar arasında tətbiq dairəsinin genişliyi və riyazi əsaslandırılmasının dəqiqliyi nöqtəyindən ən effektivlisi M.İ.Vişik və L.A.Lyüsternik tərəfindən işlənmiş və mahiyyəti onların [1] məqaləsində şərh olunmuş metoddur. Bu üsul hazırda bütün dünyada “Vişik-Lyüsternik metodu” adı altında məşhurdur. Bu üsul ilə tədqiq olunmuş işlərin sayı çoxdur. Lakin tək tərtibli singular həyəcanlanmış singular həyəcanlanmış diferensial tənliklər az öyrənilmişdir. Belə tənliklərə aid [2], [3] işlərini misal göstərmək olar.

Bu işdə $[0,1]$ parçasında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxılır:

$$L_\varepsilon u \equiv (-1)^m \varepsilon^{2m} \frac{d^{2m+1}u}{dt^{2m+1}} + \frac{du}{dt} + au = f(t), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \frac{du}{dt}\bigg|_{t=0} = \dots = \frac{d^m u}{dt^m}\bigg|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d^{m+1}u}{dt^{m+1}}\bigg|_{t=1} = \frac{d^{m+2}u}{dt^{m+2}}\bigg|_{t=1} = \dots = \frac{d^{2m}u}{dt^{2m}}\bigg|_{t=1} = 0. \quad (3)$$

Burada $\varepsilon > 0$ -kiçik parametr, m - ixtiyari natural ədəd, $a > 0$ sabit, $f(t)$ -isə verilmiş kifayət qədər hamar funksiyadır. Məqsəd (1)-(3) sərhəd məsələsinin həllinin kiçik parametrə nəzərən asimptotikasını qurmaqdır.

Asimptotik ayrılışı almaq üçün iterasiya prosesləri aparılır. Birinci iterasiya prosesində (1) diferensial tənliyinin təqribi həlli

$$W = W_0 + \varepsilon W_1 + \dots + \varepsilon^n W_n \quad (4)$$

şəklində axtarılır. W funksiyasının (4) ifadəsini (1) tənliyində u funksiyası əvəzinə yazıb, alınan bərabərlikdə ε -nün eyni dərəcəli qüvvətləri olan hədləri müqayisə etdikdə naməlum W_i ; $i = 0, 1, \dots, n$ funksiyalarını təyin etmək üçün aşağıdakı rekurrent diferensial tənliklər alınır:

$$\frac{dW_0}{dt} + aW_0 = f(t), \quad (5)$$

$$\frac{dW_k}{dt} + aW_k = f_k(t); \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Burada $k = 1, 2, \dots, 2n-1$ olduqda $f_k(t) \equiv 0$ olur. $k = 2m, 2m+1, \dots, n$ olduqda isə $f_k(t)$ funksiyaları aşağıdakı düstur ilə təyin edirlər:

$$f_k(t) \equiv (-1)^{m+1} \frac{d^{2m+1} W_{k-2m}}{dt^{2m+1}}.$$

(5), (6) bir tərtibli diferensial tənliklərdir. Onlar üçün $t = 0$ üzərində olan $m+1$ sayda olan (2) sərhəd şərtlərinin yalnız birindən istifadə ediləcəkdir. Onda $t = 0$ üzərində olan sərhəd şərtlərindən m saydası itəcəkdir. Bu itən sərhəd şərtlərinin ödənilməsini təmin etmək məqsədi ilə $t = 0$ yaxınlığında sərhəd zolaq tipli funksiya qurmaq lazım gəlir.

$t = 0$ yaxınlığında sərhəd zolaq tipli funksiyanı qurmaq üçün əvvəlcə $t = \varepsilon\tau$ əvəzləməsi aparılır və yeni τ koordinatında L_ε operatorunun yeni ayrılışı yazılır:

$$L_{\varepsilon,1} V \equiv \varepsilon^{-1} \left\{ \left[(-1)^m \frac{d^{2m+1} V}{d\tau^{2m+1}} + \frac{dV}{d\tau} \right] + \varepsilon a u \right\}$$

$t = 0$ yaxınlığında sərhəd zolaq tipli funksiya

$$V = \varepsilon(V_0 + \varepsilon V_1 + \dots + \varepsilon^{n+m-1} V_{n+m-1}) \quad (7)$$

şəklində axtarılır. V -nin (7) ifadəsini $L_{\varepsilon,1} V = 0$ tənliyində yazıb, V_j ; $j = 0, 1, \dots, n+m-1$ funksiyalarının təyin ediləcəkləri diferensial tənlikləri alırıq:

$$(-1)^m \frac{d^{2m+1} V_0}{d\tau^{2m+1}} + \frac{dV_0}{d\tau} = 0, \quad (8)$$

$$(-1)^m \frac{d^{2m+1} V_j}{d\tau^{2m+1}} + \frac{dV_j}{d\tau} = -aV_{j-1}; \quad j = 1, 2, \dots, n+m-1. \quad (9)$$

(5) (6) diferensial tənlikləri üçün sərhəd şərtləri $W + V$ cəminin

$$(W + V) \Big|_{t=0} = 0 \quad (10)$$

sərhəd şərtini ödəməsi tələbindən tapılır. (4), (7) və (10)-dan alırıq:

$$W_0|_{t=0} = 0, \quad (11)$$

$$W_k|_{t=0} = -V_{k-1}|_{\tau=0}; k=1,2,\dots,n.$$

(12)

W_i ; $i=0,1,\dots,n$ funksiyaları (11), (12) sərhəd şərtlərini ödədikdə $W+V$ cəmi (10) sərhəd şərtini dəqiq deyil, aşağıdakı mənada ε^{n+1} dəqiqliyi ilə ödəyəcəkdir:

$$(W+V)|_{t=0} = \varepsilon^{n+1} \varphi(\varepsilon). \quad (13)$$

Buradakı $\varphi(\varepsilon)$ funksiyası aşağıdakı düstur ilə təyin edilir.

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^{n+1} (V_n + \varepsilon V_{n+1} + \dots + \varepsilon^{m-1} V_{n+m-1})|_{\xi=0}. \quad (14)$$

(8), (9) diferensial tənlikləri üçün sərhəd şərtləri $W+V$ cəminin (2)-dəki qalan m sayda aşağıdakı sərhəd şərtlərinin ödənilməsi tələbindən tapılırlar:

$$\frac{d}{dt}(W+V)|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}(W+V)|_{t=0} = \dots = \frac{d^m}{dt^m}(W+V)|_{t=0} = 0. \quad (15)$$

(4), (7) və (15)-dən istifadə edəcək, (8), (9) diferensial tənlikləri üçün alınan sərhəd şərtlərini aşağıdakı bir ümumi düstur ilə vermək olar.

$$\frac{\partial^k V_p}{\partial \tau^k}|_{\tau=0} = -\frac{\partial^k W_{p+1-k}}{\partial t^k}|_{t=0}; k=1,2,\dots,m; p=0,1,\dots,n+m-1.$$

(16)

Bu düsturun sağ tərəfində mənfi indeksli W_r funksiyaları və $r > n$ olduqda alınan W_r funksiyaları eyniliklə sıfır hesab olunurlar.

Artıq W_i ; $i=0,1,\dots,n$ və V_j ; $j=0,1,\dots,n+m-1$ funksiyalarının qurulmasına keçmək olar. W_0 funksiyası (5) diferensial tənliyinin (11) sərhəd şərtini ödəyən həlli-dir. Bu məsələnin həlli

$$W_0(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

düsturu ilə verilir. $k=1$ olduqda (12)-dən alınır ki, W_1 funksiyasını qurmamışdan əvvəl V_0 funksiyası qurulmalıdır. (16) düsturundan $p=0$ olduqda alınır ki, (8) adi diferensial tənliyinin həlli olan V_0 funksiyası aşağıdakı sərhəd şərtlərini ödəməlidir:

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tau}|_{\tau=0} = -\frac{\partial W_0}{\partial t}|_{t=0}, \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \tau^2}|_{\tau=0} = 0, \dots, \frac{\partial^m \eta_0}{\partial \tau^m}|_{\tau=0} = 0. \quad (17)$$

(8) adi diferensial tənliyinə uyğun olan xarakteristik tənliyin həqiqi hissələri mənfi olan m sayda kökləri vardır. Bu kökləri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ilə işarə edək. Qeyd edək ki, $t=0$ üzərində itən sərhəd şərtlərinin də sayı m -ə bərabərdir. Bu fakt onu bildirir ki, (1)-(3) sərhəd məsələsi $t=0$ üzərində requlyar olaraq cırışır. (8) tənliyinin (17) sərhəd şərtlərini ödəyən sərhəd zolaq tipli həlli

$$V_0 = -W_0|_{t=0} \cdot (c_{01}e^{\lambda_1\tau} + c_{02}e^{\lambda_2\tau} + \dots + c_{0m}e^{\lambda_m\tau})$$

düsturu ilə təyin edilir. Burada $c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0m}$ ilə məlum ədədlər işarə olunmuşdur.

V_0 funksiyası məlum olduğu üçün W_1 funksiyasını qurmaq olar. $k=1$ olduqda (6)-dan, (12)-dən və V_0 funksiyasının aşkar ifadəsindən alınır ki, W_1 funksiyası aşağıdakı sərhəd məsələsinin həllidir:

$$\frac{dW_1}{dt} + aW_1 = 0, W_1|_{t=0} = W_1(0) \left(\sum_{i=1}^n c_{0i} \right).$$

Ayındır ki, sonuncu sərhəd məsələsinin həlli

$$W_1(t) = W_0(0) \left(\sum_{i=1}^n c_{0i} \right) e^{-at}$$

düsturu ilə təyin edilir.

$k=1$ olduqda (9)-dan və $p=1$ olduqda (16)-dan alınır ki, V_1 funksiyası aşağıdakı məsələnin sərhəd zolaq tipli həllidir:

$$\frac{d^{2m+1}V_1}{d\tau^{2m+1}} + \frac{dV_1}{d\tau} = -aV_0, \quad (18)$$

$$\left. \frac{dV_1}{d\tau} \right|_{\tau=0} = - \left. \frac{dW_1}{dt} \right|_{t=0}, \left. \frac{d^2V_1}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = - \left. \frac{d^2W_0}{dt^2} \right|_{t=0}, \left. \frac{d^3V_1}{d\tau^3} \right|_{\tau=0} = 0, \dots, \left. \frac{d^mV_1}{d\tau^m} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (19)$$

(18), (19) sərhəd məsələsinin sərhəd zolaq tipli həlli

$$V_1(\tau) = \sum_{i=1}^m [c_{i0}^{(1)} + c_{i0}^{(1)}\tau] e^{\lambda_i\tau}$$

düsturu ilə təyin olunur. Burada $c_{i0}^{(1)}, c_{ii}^{(1)}; i=1, 2, \dots, m$ ilə məlum sabitlər işarə olunmuşdur.

Prosesi bu qayda ilə davam etdirərək, W funksiyasının (4), V funksiyasının (7) ayrılışına daxil olan W_i və V_j funksiyaları ardıcıl olaraq qurulurlar. Qurulmuş bütün V_j funksiyalarını hamarlayıcı funksiyalara vuraraq, alınan yeni funksiyalar üçün əvvəlki $V_j; j=0, 1, \dots, n+m-1$ işarələrini saxlayaq.

Qurulmuş bu cəm (13) və (15) sərhəd şərtlərini ödəyir. Lakin bu cəm $t=1$ üzərindəki (3) sərhəd şərtlərini ödəməyə bilər. Ona görə də iterasiya prosesi aparılaraq $t=1$ yaxınlığında sərhəd zolaq tipli elə

$$\eta = \varepsilon^{m+1} (\eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \dots + \varepsilon^{n+m-1}\eta_{n+m-1}) \quad (20)$$

funksiyası qurulmalıdır ki, $W + V + \eta$ cəmi

$$\left. \frac{d^{m+k}}{dt^{m+k}} (W + V + \eta) \right|_{t=1} = 0; k=1, 2, \dots, m \quad (21)$$

sərhəd şərtlərini ödəsin. Hamarlayıcı funksiyalar hesabına $t=1$ olduqda V funksiyası sıfıra çevrildiyi üçün (20) sərhəd şərtlərini belə də yazmaq olar:

$$\left. \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(W + \eta) \right|_{t=1} = \left. \frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}}(W + \eta) \right|_{t=1} = \dots = \left. \frac{d^{2m}}{dt^{2m}}(W + \eta) \right|_{t=1} = 0.$$

η funksiyalarının (20) ayrılışına daxil olan η_j funksiyalarının qurulması V funksiyasının (7) ayrılışına daxil olan V_j ; $j = 0, 1, \dots, n + m - 1$ funksiyalarının qurulması kimidir. Ona görə bu prosesin üzərində dayanmırıq.

Qurulmuş $W + V + \eta$ cəmini $\tilde{u} = W + V + \eta$ ilə, $u - \tilde{u}$ fərqlini $u - \tilde{u} = \varepsilon^{n+1}z$ ilə işarə edərək, (1)-(3) sərhəd məsələsinin həlli üçün aşağıdakı asimptotik ayrılışı alırıq:

$$u = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i W_i + \sum_{j=0}^{n+m-1} \varepsilon^{1+j} V_j + \sum_{j=0}^{n+m-1} \varepsilon^{m+1+j} \eta_j + \varepsilon^{n+1} z. \quad (22)$$

Burada $\varepsilon^{n+1}z$ -qalıq həddidir.

İşdə alınan nəticələri aşağıdakı təklif şəklində ümumiləşdirmək olar.

Teorem. Fərz edək ki, $f(t)$ funksiyası $[0, 1]$ parçasında $2m + 2n + 3$ tərtibə qədər kəsilməyən törəmələrə malikdir. Onda (1)-(3) sərhəd məsələsinin həllinin kiçik parametərə nəzərən asimptotik ayrılışı (22) şəklindədir. Buradakı W_i - funksiyaları birinci iterasiya prosesində təyin olunurlar, V_j, η_j - funksiyaları uyğun olaraq $t = 0$ və $t = 1$ yaxınlığında sərhəd zolaq tipli funksiyalar olub, müvafiq iterasiya prosesləri ilə təyin olunurlar, $\varepsilon^{n+1}z$ -qalıq həddidir və z funksiyası üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\varepsilon^{2m} \left(\left. \frac{d^m z}{dt^m} \right|_{t=1} \right)^2 + c_1 \int_0^1 z^2 dt \leq c_2 \varepsilon^{2(n+1)}.$$

Buradakı $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ sabitləri ε -dan asılı deyillər.

İstifadə olunmuş ədəbiyyat:

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. УМН, 12 (1957), вып.5 (77), с.3-122.
2. Салимов Я.Ш., Сабзалиева И.М. О краевых задачах для одного класса сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений неклассического типа. Докл. РАН, 2004, т. 399, №4, с. 450-453.
3. Салимов Я.Ш., Сабзалиева И.М. О краевых задачах для одного класса сингулярно возмущенных уравнений произвольного нечетного порядка. Дифференц. уравн., 2006, т. 42, №5, с. 653-659.
4. Sabzaliev M.M., Sabzalieva I.M. On the asymptotics of the solution of the boundary value problem for a quasilinear elliptic equation degenerating into a parabolic equation. Baku Mathematical Journal, 2022, vol.1, №1, pp.111-121.